全国普通高校自动化类专业规划教材



Modern Control Theory 2nd Edition

现代控制理论基础（第2版）



石海彬 ◎编著

Shi Haibin

清華大學出版社

全国普通高校自动化类专业规划教材

现代控制理论基础（第 2 版）

石海彬　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书立足于时间域的状态空间概念，系统地介绍了线性控制系统的分析和设计理论。绪论部分介绍了控制理论的发展历程和现代控制理论的内容与定位；第 1 章介绍控制系统的状态空间模型；第 2 章介绍了线性控制系统的状态响应；第 3 章详细剖析控制系统的能控性和能观测性；第 4 章给出了自治系统的 Lyapunov 稳定性概念和判别方法；第 5 章从概念和方法上给出了线性系统的设计理论，包括极点配置，线性二次型最优控制、解耦控制、状态观测器等内容；第 6 章对离散控制系统进行了扼要介绍。

本书结构清晰、层次分明，注重基本概念、基本思想和基本方法，可作为高等院校自动控制及相关专业本科高年级学生和研究生的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/石海彬编著. —2 版. —北京：清华大学出版社，2018
(全国普通高校自动化类专业规划教材)
ISBN 978-7-302-48685-5

Ⅰ. ①现…　Ⅱ. ①石…　Ⅲ. ①现代控制理论—高等学校—教材　Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 271397 号

责任编辑：梁　颖　李　晔
封面设计：傅瑞学
责任校对：时翠兰
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：三河市国英印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：11.75　　**字　　数**：283 千字
版　　次：2015 年 12 月第 1 版　2018 年 3 月第 2 版　　**印　　次**：2018 年 3 月第1 次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：35.00 元

产品编号：077564-01

第 2 版前言

PREFACE

“现代控制理论”课程是高校自动化及相关专业的必修课程之一；其中基于状态空间理论的动力学系统分析与综合，也是国际众多名校自动化、电气等学科知识体系的重要组成部分。

本教材的第 1 版，融入了多年来教学过程中师生的共同思考，在一些概念、思想、表述、方法上避免简单重复、人云亦云，深刻剖析精神实质，运用简练通俗的语言分层表述，指出了以往教材不曾强调的很多常见误区。由于内容的新颖性，经两届教学使用，受到了学生们的好评，实现了预期的目标。

同时，在第 1 版教材的使用过程中，经过师生进一步的问答交流和学生们理论联系实际的科技实践活动，又有一些新观点、新理念被陆续提出、充分讨论和细致论证，同时发现一些新误区。再版教材能够让这些新知识面向更为广泛的受众，使之接受大家的检验，进而启发更多的学生思考、评判并提出改进意见。

这次再版，把第 1 版两年使用过程中的新观点、新理念、新结论以及新误区写入其中。与第 1 版相比，在指导思想上，一脉相承；在内容安排上，是继承和创新的有机融合；在文字表述上也进行了局部的修改和完善。

衷心感谢东北大学自动化专业两届学生以及其他院校广大师生读者对第 1 版教材的积极反馈。这些反馈，正是本教材得以改进和再版的深层动力。欢迎大家各种形式的探讨，继续对第 1 版和再版教材提出批评指正！

编著者

电子邮件：shihaibin@ise. neu. edu. cn

QQ：1318352261

2017 年 10 月

第 1 版前言

PREFACE

“现代控制理论”课程作为高校自动化及相关专业的必修课程和某些专业研究生阶段的选修课程，教材众多。本书特点如下：

指导思想方面，强调融入多年来教学过程中师生的共同思考，在一些概念、思想、表述、方法上避免简单重复、人云亦云，而是深刻剖析精神实质，并用简练通俗的语言分层表述。基于此，本书指出了以往教材不曾强调的一些常见误区，并加以更正。

具体内容方面，部分特色之处简述如下。

第 1 章讲述控制系统的状态空间模型：

① 结合基础的传递函数和高阶微分方程描述，首次明确了状态变量的数学和物理本质。

② 在串联分解和并联分解中补充了共轭复根以及共轭复根叠加重根的情况。相对于以往教材，这部分内容更为完整。

第 2 章讲述控制系统的状态响应：

① 考虑工科学生的特点，简化推导，避免以往教材过于数学化的处理方式。

② 指出了矩阵指数有限项多项式展开中系数未必线性无关。

③ 指出了初态响应和输入响应的内在联系。

④ 结合实例指出虚轴极点导致等幅振荡这一误区。

⑤ 强调了系统初始时刻的相对性，为能控能观、稳定性等后续概念打好基础。

第 3 章讲述控制系统的能控性和能观测性：

① 以全新的视角剖析了能控能观测的时间、空间特性。

② 强调了以往教材绝少提及的能观测概念的时间顺序问题，并作为单独一节，从而使能观测性概念真正和应用联系起来。

③ 强调了能控能观测主要是针对系统外部信号，针对的是扩张系统和扩张状态。这样就打消了学生由于实际被控对象能控能观测而产生的能控能观无用论。

第 4 章讲述自治系统的稳定性理论：

① 以全新的视角剖析了稳定性的时间、空间特性。

② 强调了 Lyapunov(李雅普诺夫)稳定、渐近稳定和不发散的关系，指出 Lyapunov 稳定等价于不发散这一误区。

③ 给出了 Lyapunov 第二方法的简单数学本质，在此过程中指出了关于吸引域的一个常见误区。

第 5 章讲述线性控制系统的设计理论：

① 以全新的视角剖析了静态输出反馈和动态输出反馈的概念、功能、设计特点，拉近理论和应用的距离。

② 给出了状态观测器的一般概念，使学生做到透彻理解，并从概念上指出了状态观测器系统输出方程的一个常见误区。

第6章讲述离散控制系统:

指出离散情形由于系统矩阵未必可逆导致的状态转移矩阵未必可逆,使得与连续系统相平行的能控性判据失去了必要性,仅为充分条件。

各章建议学时:包括绪论在内,全书共计7部分。可参考2、8、6、6、6、10、2共计40学时来进行。对于总课时多于或少于40学时的情况,教师可自行酌情增减。

本书主要参考文献已在书后列出,特别是受益于清华大学吴麒教授和郑大钟教授以及Hassan K. Khalil的著作,在此表示衷心的感谢。

《礼记》中说:"学然后知不足,教然后知困。知不足,然后能自反也。知困,然后能自强也。故曰:教学相长也。"本书既是教学相长、师生相互问答、思考的结晶,也必将在后续的教学过程中继续动态完善。

由于编者能力所限,书中错漏、谬误、不妥之处恳请广大读者批评指正。不论咫尺天涯,智慧的读者永远是本书编著者的良师益友,是科技和社会进步的动力源泉。

编著者

电子邮件:shihaibin@ise.neu.edu.cn

QQ:1318352261

2015年9月

目　录
CONTENTS

第 0 章

绪论

0.1 系统与自动控制

自动控制的研究对象是系统。

系统的概念和含义非常广泛。系统是由相互关联相互作用的若干部分按照一定规律组合而成的、具有特定功能的整体。

系统最基本的特征是其整体性。系统的行为和功能是由其整体所决定的。系统可以具有其组成部分所没有的功能。组成部分相同但相互关联不同的两个系统,可呈现出完全不同的行为和功能。

系统可以具有完全不同的背景,如工程系统、生物系统、经济系统、社会系统等。但在系统理论中,常常可以忽略系统具体的含义、将其抽象为一般意义下的系统加以研究。这样做有助于揭示系统的一般特性。

系统的概念具有层级性。系统的每个组成部分也可以是系统,而系统自身又可以是一个更大系统的组成部分。

系统有动态和静态之分。动态系统又称为动力学系统,含有动力学特性,其模型描述中有系统变量的导数项或差分项,亦即系统由微分方程或差分方程来表示;而静态系统可由单纯的变量间的代数方程来表示。在系统与控制理论中,主要研究动态系统。

通常,在特定输入下研究系统的运动规律,称为系统分析;为了实现一定的动、静态性能要求(如调节时间、超调量、稳态误差等)而研究改变系统运动的可能性和方法,称为系统综合。前者属于认知系统,后者则是改造系统。

术语“综合”与“设计”一般说来有所不同。前者在应用上可实现的前提下确定控制律的形式和参数,而后者还要考虑控制系统构成的一些实际问题,如线路、元件的选取。本书中对这两个术语不加严格区分。

0.2 控制理论的发展历程

人类利用控制技术的历史,可以追溯到几千年前。但是,把控制技术在工程实践中的规律加以总结提高、进而以此为指导去推进工程实践,形成自动控制理论,成为一门独立的学科,则是 20 世纪初期和中期的事情。

按照时间顺序,控制理论的各个阶段分述如下。

1. 经典控制理论

经典控制理论起源于 20 世纪 20 年代。在 20 世纪 20～40 年代之间,曾涌现出很多经典控制理论的先驱,如 Minorsky、Nyquist、Hagen、Bode 和 Wiener 等。他们的工作为经典控制理论奠定了基础,同时促进了第二次世界大战中很多武器和通信自动化系统的研制。

第二次世界大战后,学者们总结了武器研制和设计方面的实践经验,陆续出版了基于经典控制理论的专著,建立了较为系统的伺服理论。这对战后的许多实际自动控制过程起到

了重要的指导作用,也为人类进入宇宙空间做出了贡献。

第二次世界大战后到20世纪50年代中期,控制理论又得到了新的发展,出现了根轨迹法、非线性系统的谐波近似法(即描述函数法)、采样控制系统、自寻优控制和部分最优控制、多变量系统、系统灵敏度分析以及动态系统测试等新内容。

概括地说,经典控制理论具有以下特征。

① 以单变量线性定常系统为主要研究对象;

② 以频率域方法作为研究控制系统动、静态特性的主要技术;

③ 以各种图表,如Nichles(尼切莱斯)图、Bode(伯德)图、Nyquist(奈奎斯特)曲线、根轨迹、Routh(劳斯)表作为系统分析和综合的主要技术手段。

2. 现代控制理论

现代控制理论起源于20世纪60年代,形成的标志是:

- 贯穿系统描述、分析与综合全过程的状态空间方法;
- 最优控制中的Pontryagin(庞特里雅金)极大值原理和Bellman(贝尔曼)动态规划;
- 随机系统理论中的Kalman(卡尔曼)滤波。

由此,实现了经典控制理论与现代控制理论的接轨。

较之于经典控制理论,现代控制理论具有以下特征:

(1) 以多变量的线性系统和非线性系统为研究对象。近代工业过程和航空、航天等许多领域中的实际系统都是非常复杂的,表现为环节非线性、多变量耦合以及参数时变等现象。这些系统都在现代控制理论的研究之列。例如,作为现代控制理论形成标志之一的Pontryagin极大值原理,就是针对一般的非线性、多变量和参数时变系统提出的。

(2) 以时间域,尤其是状态空间方法为主要方法。现代控制理论通常在时间域上建立系统的状态空间模型,进而进行各种定性、定量的分析以及控制律设计。

(3) 以现代数学理论为主要分析手段。不同于经典控制理论中的复变函数和Laplace变换,现代控制理论以线性代数、矩阵理论、微分方程、Lie代数、现代微分几何等作为主要工具;以往看似与自动控制无缘的一些数学工具,也已经或正在进入控制理论的研究领域。

(4) 以计算机为主要的分析设计工具。在经典控制理论中,由于研究对象相对简单,人们利用图表,通过手工即可完成分析和设计;但在现代控制理论中,这样的做法很难行得通。由于对象相对复杂,分析和设计中的各种计算基本要利用计算机来实现。

控制系统计算机辅助设计(Control System of Computer Aided Design,CSCAD)以计算机为工具,以现代控制理论为依据,已经日趋完善,并在实际中得到了重要应用。计算机用于系统分析设计,在计算方面具备明显的优越性。此外,在计算机上可以修改系统参数,因而能对不同参数组合以及多种控制方案进行充分的分析比较;而借助于计算机的图形显示功能,则可以全面直观地获取系统的动、静态特征。

现代控制理论包括线性系统理论、最优滤波理论、系统辨识、最优控制、自适应控制和非线性系统理论等主要分支。

1) 线性系统理论

线性系统分析与设计的理论和方法是现代控制理论的基础,主要研究线性系统的模型描述、变量运动规律以及改变运动规律的可行性与方法,揭示系统结构、参数、行为和性能之间的定性和定量关系。线性系统理论包括系统的模型描述、状态响应、能控性、能观测性、稳

定性、状态反馈、状态观测器、内模原理和鲁棒调节器等内容。

2）滤波理论

滤波的研究对象是受到外部信号干扰的动力学系统，如由随机微分方程或随机差分方程所描述的随机系统，或受到幅值有界或能量有界（如脉冲）信号干扰的系统。滤波就是利用被干扰信号污染的量测数据，按照某种准则，获得有用信号的最优估计或满足指定要求的估计。Kalman 滤波理论用状态空间法设计的最佳滤波器，实用性强且可适用于非平稳过程，是滤波理论的一大突破。$\boldsymbol{H}_\infty$ 滤波方法在干扰信号能量有界的前提下可以获得有用信号的最优或次优（即满足给定要求）估计，无需干扰信号的振型、测量值、变化率或均值方差等具体信息，适用面广。

3）系统辨识

建立系统的数学模型既是系统研究的一个独立模块，又是广义的系统分析的一部分，是系统研究的基础性工作。很多情况下，由于各种条件的限制，根据系统机理建立系统模型并非总能奏效。例如，化工过程中的物理学规律不像力学和电磁学系统那么明确，因而机理建模难以执行。即便是力学和电磁学系统，由于间隙、滞环、饱和、死区等非线性特性和磁场分布不均匀等客观因素，机理建模客观上也可能存在较大误差。

系统辨识就是在系统的输入-输出的实验数据的基础上，按照某种原则确定出一个最符合实验数据的系统模型。若模型的结构形式已知但某些参数未知，则只需用输入-输出的量测值来确定其参数，称为参数估计；而同时确定模型结构形式和参数的则称为系统辨识。

4）最优控制

实用的控制方法，往往一方面要求某些性能指标满足给定要求或达到最优，同时对控制量本身也有幅值和能量等约束。最优控制就是在给定限制条件和性能指标下，寻找使系统性能在一定意义下为最优的控制规律。这里所说的“限制条件”是指物理上对系统所施加的一些限制；而“性能指标”是为评价系统的优劣而规定的标准。在解决最优控制问题中，Pontryagin 极大值原理和 Bellman 动态规划法是两种具有代表性的方法，它们以不同的形式给出了最优控制所必须满足的条件。

5）自适应控制

自适应控制是指随时修正系统的数学模型并在线调整系统的控制律。当被控对象内部的结构和参数以及外部的环境存在不确定干扰时，系统能对有关信息实现在线测量和处理，从而不断地修正系统结构的有关参数和控制增益，使之处于所要求的最优状态或满足设计要求。

常用的自适应控制方案有编程控制、模型参考自适应和自校正控制，其中以自校正自适应最具代表性。自适应控制理论的进一步发展是自学习、自组织系统理论。

自适应控制要求与之匹配的在线计算能力，是计算水平决定控制水平的鲜活例证。

6）非线性系统理论

主要研究非线性系统的运动规律和改变运动规律的方法，主要包括相对阶、稳定性、线性化、解耦以及反馈控制、状态估计等理论。

非线性系统理论的核心思想，本质上是各种各样的线性化。

3. 多样化发展时期

在 20 世纪 60 年代末和 70 年代，控制理论进入了多样化发展时期，出现了多变量系统

频域控制理论,以及 Zadeh 等人提出的模糊控制理论、大系统理论和智能控制理论。

大系统有多种含义,通常是指规模庞大、结构复杂、变量众多的信息与控制系统,涉及生产过程、交通运输、计划管理、空间技术等方面的控制与信息化处理问题。

智能控制是模仿某些智能行为进行控制参数整定或决策的方法,如遗传算法、蚁群算法、粒子群算法、神经网络等。

近年来,自动控制理论及其应用的范围在继续深化和扩大,为适应实践需求而产生的新思想、新方法发展迅速,各学科之间渗透融合的趋势不断加强。

0.3　本书的内容安排

本书第1章讨论状态空间描述的基本概念、建立方法和基本性质。这些是状态空间法的基础。

第2章讨论线性控制系统的定量分析,就连续和离散两种情形,建立了系统状态响应的一般表达式。

第3章讨论能控性和能观测性,属于在线性系统理论中最为基本的概念。这一章将给出能控和能观测的定义以及判别方法,进一步揭示系统的状态空间描述和传递函数矩阵描述的关系。

第4章讨论 Lyapunov 稳定性理论。包括 Lyapunov 第一方法、Lyapunov 第二方法、Lyapunov 方程等概念和内容。

第5章讨论线性系统的综合问题。包括极点配置、镇定(稳定化)、解耦控制、跟踪控制、线性二次型最优控制、状态观测器等内容。

第6章就状态空间模型、状态响应、能控能观测、稳定性、控制律设计等内容,对离散控制系统特别是离散线性控制系统进行了有重点的讨论。

第 1 章

控制系统的状态空间描述

控制系统的时间域理论,是指以时间域数学模型为系统描述的、直接在时间域内进行系统分析与综合的理论方法。

在系统和控制理论发展的早期阶段,时间域理论只能用来分析单输入-单输出系统的运动,系统的描述是反映输入-输出关系的单变量高阶微分方程,分析的方面主要限于运动的稳定性。

20 世纪 60 年代以后,卡尔曼将状态和状态空间的概念方法引入系统和控制理论,极大地推动了时间域理论的发展,使之既适用于单输入-单输出系统,又适用于多输入-单输出系统,既能处理定常系统,又能处理时变系统;既能用于系统分析,又能用于系统综合。这一理论采用状态空间描述作为系统的数学模型,并以状态空间方法为核心。

本章讨论建立控制系统状态空间描述的问题。包括状态和状态空间的概念、性质,状态空间描述的组成和形式,状态空间描述的建立方法,状态空间描述和传统的输入-输出描述的关系,状态空间描述在可逆变换下的特性等内容。

1.1 系统描述中的基本概念

当我们认知一个系统的时候,可以考虑把有关的全部物理量分为**信号**(电压、速度、温度、压力、人口、产值等)和**参数**(电容、质量、弹性系数、比热、出生率、利率等)两大类。这里的信号和参数都是广义的。信号通常是随时间变化的,是系统的动态信息,是研究者关注的重点;参数则相对不变或变化不大,基本属于系统的静态信息,是系统结构的细节描述,而结构决定了系统功能。虽然二者之间没有绝对的界线,但这样的划分对我们理解系统是有帮助的。

输入 外部施加在系统上的激励信号称为输入,包括干扰输入(负载、风速、电压波动、噪声等)和为了改变系统运动而施加的控制输入。

注意,这里的输入不是系统的设定值(给定量、参据量)。

输出 来自系统的信号称为输出。能从外部测量到的输出,称为量测输出(可测输出);被期望按照一定性能跟随某个信号(设定值)的输出,称为被控输出(评价输出)。

通常情况下,被控输出本身往往也是量测输出;但在无传感器控制的场合,二者是不同的。

输入是环境对系统的作用,而输出是系统对环境的作用;二者都是系统的外部变量。

松弛 在时间区间$[t_0,+\infty)$上,若系统的输出只由输入唯一确定,则称系统在 t_0 时刻是松弛的。

从能量的观点看,系统在 t_0 时刻是松弛的意味着系统在 t_0 时刻不存储能量;若松弛性不成立,则输出不仅和输入有关,还和系统初始条件有关。

同输入影响系统输出一样,不满足松弛条件的系统,即便没有输入,也会存在由初始条

件产生的输出。输入和初始条件引起的输出变化,都是自动控制的研究内容。

因果　对于任意时刻 t,若系统在 t 时刻的输出仅取决于 t 时刻和 t 之前的输入,而与 t 时刻之后的输入无关,则称系统是因果的,或说满足因果关系。

不具有因果性的系统,能够预测 t 时刻之后的输入,并施加于系统而影响其输出。例子之一是离散的奇异控制系统。

图1.1.1所示的动态系统是由一些相互制约的部分构成的整体。矩形框以外的部分为系统环境。输入和输出分别用 $u_1(t),\cdots,u_p(t)$ 和 $y_1(t),\cdots,y_q(t)$ 来表示。

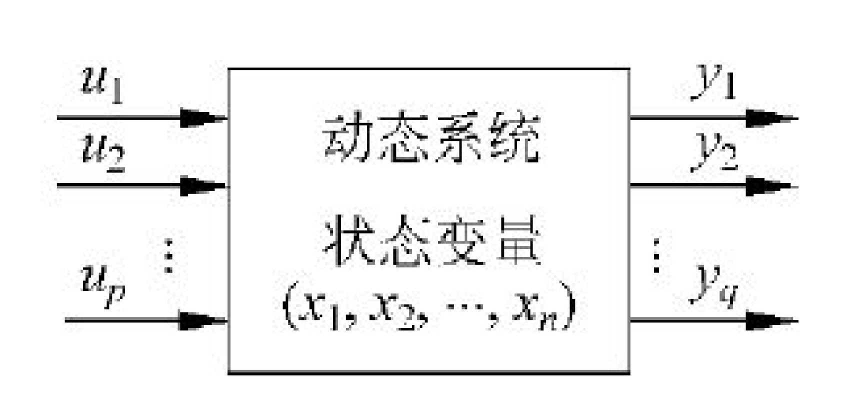


图1.1.1　动态系统

可以想象,系统内部必然也存在一些信号(如后续会提到的状态变量)。这些内部信号和外部的输入输出同时随着时间而变化,体现了系统的运动。系统的数学描述就是反映系统信号之间的定性、定量关系的数学模型。

系统的数学描述可区分为两种基本类型:输入-输出描述和状态空间描述。

输入-输出描述把系统视为一个黑箱,不涉及系统内部的信号,只反映系统外部的输入、输出之间的因果关系。

如果系统是线性的、定常的、单输入、单输出的,那么其输入-输出描述可以表示为如下的一个线性常系数高阶微分方程:

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)\\ =&b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1u^{(1)}(t)+b_0u(t) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

在系统的零初始条件下,对方程(1.1.1)取 Laplace 变换,得到系统的传递函数

$$g(s)=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \tag{1.1.2}$$

从后续章节的分析中将会看到:在系统零点和极点重合的情况下,输入-输出描述有可能无法反映系统内部的某些部分,因而总体上属于对系统的一种不完全描述;而状态空间描述能够表达系统的一切特性,是对系统的完全描述;只有当系统满足一定条件时,两种描述才可能等价。这表明,在建模准确度方面,状态空间描述优于输入-输出描述。

1.2　状态空间描述的基本概念

状态和状态空间的概念,在质点和刚体动力学中得到了广泛的应用;在被引入系统和控制理论领域后,状态和状态空间有了更为一般的含义。下面结合几个例子,给出系统状态空间描述的基本概念。

【例1.2.1】　考虑一个由如下方程

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C(t) \\ \dot{i}_L(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}u_C(t)-\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}i_L(t)+\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}e(t) \\ -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L}u_C(t)-\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}i_L(t)+\dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L}e(t) \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

$$u_{R_2}(t)=-\frac{R_2}{R_1+R_2}u_C(t)-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L(t)+\frac{R_2}{R_1+R_2}e(t) \tag{1.2.2}$$

描述的某 RLC 电路。其中,电源电压 $e(t)$ 为输入,输出取为端电压 $u_{R_2}(t)$。

【例 1.2.2】 考虑一个 BUCK 变换器的平均模型描述

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C(t) \\ \dot{i}_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C}i_L(t) - \dfrac{1}{RC}u_C(t) \\ -\dfrac{1}{L}u_C(t) + \dfrac{1}{L}d(t)e(t) \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

其中,输入电压 $e(t)$存在波动,视为干扰输入;$d(t)$表示占空比,为控制输入;输出为电压 $u_C(t)$。

【例 1.2.3】 考虑面装式永磁同步直线电机的模型描述

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d(t) \\ \dot{i}_q(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_s}{L}i_d(t) + \dfrac{\pi}{\tau}v(t)i_q(t) + \dfrac{1}{L}u_d(t) \\ -\dfrac{\pi}{\tau}v(t)i_d(t) - \dfrac{R_s}{L}i_q(t) - \dfrac{\pi\psi_f}{\tau L}v(t) + \dfrac{1}{L}u_q(t) \\ \dfrac{3\pi n_p\psi_f}{2\tau M}i(t)_q - \dfrac{B_v}{M}v(t) - \dfrac{F_0(t)}{M} \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

其中,信号方面,u_d、u_q 为 d、q 轴电压,也是系统的控制输入;i_d、i_q 为 d、q 轴电流;v 为动子线速度。参数方面,$F_0(t)$表示负载阻力,为干扰输入;L 为电感;R_s 为定子电阻;ψ_f 为永磁体在定子绕组直轴上的磁链分量;τ 为极距;n_p 为极对数;M 为动子质量;B_v 为黏滞摩擦系数。

如果考虑位置调节,还要增加方程

$$\dot{s}(t) = v(t) \tag{1.2.5}$$

s 为动子线位移。

【例 1.2.4】 考虑某区域的人口分布描述

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\gamma)((1-\alpha)x_1(k) + \beta x_2(k)) \\ (1+\gamma)(\alpha x_1(k) + (1-\beta)x_2(k)) \end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

其中,$x_1(k)$为城市人口,$x_2(k)$为农村人口;每年由城市迁往农村的人口占上一年城市人口的比例为 α,由农村迁往城市的人口占上一年农村人口的比例为 β,总的人口自然增长率为 γ。

这里的 α、β 和 γ,既可视为系统参数,也可以作为系统的控制输入,取决于具体的问题。在传染性疾病等模型的描述中,也有类似的情况。

对于一般的动力学系统,有如下概念。

静态信息 系统的结构和参数。

动态信息 系统自身全部信号在任意时刻的数值。

状态变量 能够完全表示系统动态信息的最少一组信号。如例 1.2.1 和例 1.2.2 中的 $i_L(t)$和 $u_C(t)$,例 1.2.3 中的 $i_d(t)$、$i_q(t)$和 $v(t)$,例 1.2.4 中的 $x_1(k)$和 $x_2(k)$。

这里的"完全表示"可以形象地理解为:系统自身(或说系统内部)的任意一个信号,都能表示为以状态变量为"自变量"的"代数函数",可能是一元函数,也可能是多元函数。因此,我们说状态变量是**完备**的。

状态变量之间是**独立**的:每个状态变量都不能表示为其他状态变量的代数函数,否则就会出现冗余的情况,和定义中"最少"的提法相违背。

需要指出,上述"独立"并非毫无关系。比如位移和速度,是积分和微分的关系,但可以

同时作为状态变量,因为二者都不能表示为对方的代数函数。

由于系统的静态信息相对不变,把握了状态变量,就把握了系统的全部动态信息,进而也就把握了整个系统。因此,研究状态变量对于研究系统运动能起到纲举目张的作用。从这个意义上说,状态变量有时用来代表整个系统。

状态变量的个数 n 称为系统的阶次,即一个阶次对应一个状态变量。阶次同时也是系统的结构信息,虽然可由状态变量个数来表示,但本质上与状态变量的选取无关。

对于来自机电领域等物理意义明确的系统,一个储能元件对应一个状态变量。当储能元件的惯性(机械惯性、电磁惯性等)可以忽略时,系统的阶次也就随之降低。例如,作为直流电动机的测速发动机,转子的转动惯量和电枢电感都很小,可以忽略不计。于是,测速发动机就从2阶的动态系统简化为静态的比例环节,阶次变为0。

一个惯性环节对应一个状态变量,一个振荡环节包含两个储能元件,对应两个状态变量。

一个积分环节对应一个状态变量。积分环节的电路实现中,包含储能元件。积分和储能,不是瞬间完成的,都需要时间过程。

微分环节,不论几阶微分,都不对应状态变量。从动力学模型的角度看,微分环节的阶次是0。微分是一个瞬时的概念,不依赖于时间过程。

时滞环节在离散时间系统建模中有时可以被定位为动力学行为,对应状态变量。

状态变量通常取为物理含义直观的信号,如电压、速度、温度、压力、产值等,这样便于理解系统的数学模型,也为状态变量的测量提供了物质基础。但这并非全部,有时为了便于对基于简化的或特定结构的数学模型进行分析和设计,状态变量可能会因此而变得抽象,物理含义不再直观。按照某种原则保持系统输入-输出关系的模型降阶就会导致这种情况。也可参考本书1.4节中的式(1.4.45)和式(1.4.55)。

状态变量的含义,直观也好,抽象也罢,都是为了总体上分析设计的简便。

状态向量　以状态变量中全部信号 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 为分量的列向量 $\boldsymbol{x}(t)$。在例1.2.3中,状态向量就是 $[i_d(t)\quad i_q(t)\quad v(t)]^{\mathrm{T}}$。

后续会看到,对于同一系统,状态向量的选取不是唯一的,因而状态向量也是**多样**的;同时,不同状态向量之间是**等价**的:在两个不同的状态向量之间,必存在一个可逆的线性或非线性变换。

输入向量　以输入变量中全部信号 $u_1(t),\cdots,u_p(t)$ 为分量的列向量 $\boldsymbol{u}(t)$。在例1.2.3中,输入向量就是 $[u_d(t)\quad u_q(t)]^{\mathrm{T}}$;在例1.2.1和例1.2.2中,输入 $e(t)$ 是标量。

输出向量　以输出变量中全部信号 $y_1(t),\cdots,y_q(t)$ 为分量的列向量 $\boldsymbol{y}(t)$。例1.2.3中,i_d、i_q、v 和 s 都可以是输出,组成输出向量。

状态空间　以状态向量分量 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 为基底的 n 向量空间。

状态轨迹　系统在每一时刻 t 的状态,表现为状态空间中以 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 为坐标的一点;随着时间变化,系统状态在空间中描绘出一条轨迹,称为状态轨迹(状态轨线)。

状态方程　描述系统内部的状态变量 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 和外部的输入变量 $u_1(t),\cdots,u_p(t)$ 之间关系的一阶微分方程组(连续系统)或一阶差分方程组(离散系统),称为系统的状态方程。一般形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \tag{1.2.7}$$

或

$$\boldsymbol{x}(k+1)=f[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] \tag{1.2.8}$$

如式(1.2.1)、式(1.2.3)～式(1.2.6)。

根据状态方程,状态变量**完备**还表现在：只要给定变量组 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$在初始时刻 t_0 的值,以及输入变量 $u_1(t),\cdots,u_p(t)$在 $t\geqslant t_0$ 时的值,则系统中任意一个信号在 $t\geqslant t_0$ 时的值就被完全确定了。

输出方程　描述系统输出变量 $y_1(t),\cdots,y_q(t)$与系统状态变量 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$、输入变量 $u_1(t),\cdots,u_p(t)$之间关系的代数方程,称为输出方程。一般形式为

$$\boldsymbol{y}(t)=g[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\text{(连续系统)} \tag{1.2.9}$$

或

$$\boldsymbol{y}(k)=g[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k]\text{(离散系统)} \tag{1.2.10}$$

如例1.2.1中的式(1.2.2)。

状态空间表达式　状态方程和输出方程的组合,称为状态空间表达式。

由此可见,状态空间描述是基于系统结构和内部、外部信号关系分析的数学模型,由两个数学方程(组)构成：一个是状态方程,表示怎样由输入变量 $u_1(t),\cdots,u_p(t)$和(或)系统初态得到系统内部变量 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$,形式上通常是微分方程或差分方程；另一个是输出方程,表示怎样由系统内部变量 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$和输入变量 $u_1(t),\cdots,u_p(t)$得到输出变量 $y_1(t),\cdots,y_q(t)$,形式上是代数方程。

输入影响输出有两条途径：一是输入通过影响状态变量进而影响输出,属于动态过程；二是通过输出方程中的直接传递项影响输出,属于静态过程。

离散时间系统有两大类：一类是连续时间系统离散化得到的采样系统,另一类离散系统与采样无关,如萃取过程。

以下讨论针对连续系统进行,对离散系统有平行的结论。

状态方程(1.2.7)的右端一般总和时间直接、间接相关。若 f 中第3个综量 t 存在,即 f 显含 t,则和时间 t 直接相关；否则 f 隐含 t,和时间 t 间接相关。输出方程式(1.2.9)有类似的讨论。

定常系统　若系统状态方程和输出方程的右端均不显含时间 t,则称系统是定常的；否则就是时变的。

系统的结构和参数(电阻、电感、电容、质量、弹性系数、杆长等)不随时间变化,其数学描述就是对应的状态空间表达式中不显含时间 t。

线性系统　若系统状态方程和输出方程的右端 f、g 的每个分量均为状态变量 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$和输入 $u_1(t),\cdots,u_p(t)$的线性组合,则称系统是线性的；否则就是非线性的。线性组合的系数可能与时间 t 有关,某些系数可以为零。

如此定义的线性系统,可能由于时变特性而不能用传递函数来表示；但当松弛条件成立时,其输入输出必然满足叠加原理。

例1.2.1是线性系统；在例1.2.2的状态方程中,出现了输入的乘积 $d(t)e(t)$,例1.2.3的状态方程中,有状态变量的乘积 $v(t)i_d(t)$和 $v(t)i_q(t)$,因而都不是线性系统。

自治系统　若系统状态方程和输出方程都和外部输入无关,则称为自治系统。

有些文献中,“自治系统”还有另外的含义,和前述的“定常系统”是重合的,是一种侧重

理论化的提法。

状态空间分析法　在状态空间中以状态向量或状态变量描述系统的方法称为状态空间分析法。优点是，能了解系统内部状态的变化特性，适用于描述各类系统，便于采用向量、矩阵记号简化数学描述，便于在计算机上求解，便于应用各类现代分析设计方法。

线性时变系统状态空间表达式的一般形式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)\end{cases}\tag{1.2.11}$$

按照前述“线性”的定义，参数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{C}(t)$、$\boldsymbol{D}(t)$ 不能出现状态变量和输入变量，否则系统就是非线性的。基于式(1.2.11)，有如下概念：

$\boldsymbol{A}(t)$ 表示状态变量之间的耦合关系，称为系统矩阵。

$\boldsymbol{B}(t)$ 表示输入变量进入系统的方式，称为输入矩阵。根据 $\boldsymbol{u}(t)$ 为干扰输入和控制输入的不同情形，$\boldsymbol{B}(t)$ 分别称为干扰输入矩阵和控制输入矩阵。控制输入矩阵简称控制矩阵。若输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 是标量，则矩阵的提法改为向量，即输入向量、控制向量等，一般改用小写字母表示。

$\boldsymbol{C}(t)$ 表示系统对外部作用的方式，称为输出矩阵。若 $\boldsymbol{y}(t)$ 是标量，则 $\boldsymbol{C}(t)$ 称为输出向量，一般改用小写字母表示。

$\boldsymbol{D}(t)$ 表示输入不经过系统直接作用于输出的方式，称为直接传递矩阵。若 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$ 出现标量，则 $\boldsymbol{D}(t)$ 简化为向量或标量，一般改用小写字母表示。

线性定常系统状态空间表达式的一般形式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}\tag{1.2.12}$$

如例1.2.1可以表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_C(t)\\ \dot{i}_L(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}\\ -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C(t)\\ i_L(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}\\ \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L}\end{bmatrix}e(t)\tag{1.2.13}$$

$$u_{R2}(t)=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C(t)\\ i_L(t)\end{bmatrix}+\frac{R_2}{R_1+R_2}e(t)\tag{1.2.14}$$

多数情况下，系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和控制矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与系统元件参数有关；输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 通常与元件参数无关，直接传递矩阵 $\boldsymbol{D}$ 通常为零(见式(1.2.14)中的输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和直接传递矩阵 $\boldsymbol{D}$ 含有元件参数，属于例外)。

式(1.2.11)和式(1.2.12)表示的系统有一些简单记法。以式(1.2.12)为例，可记为 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D})$；若 $\boldsymbol{D}=0$，则简化为 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$；若只考虑状态方程，如讨论状态能控的场合，则简记为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$；若只关注系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和输出矩阵 $\boldsymbol{C}$，如讨论状态能观测的场合，则简记为 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$。

这些记号中，$\boldsymbol{C}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 前、$\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 后，是为了明确输出矩阵和输入矩阵的位置。

应该指出，一个好的状态空间表达式，其各个参数矩阵中非零元素的绝对值应具有相同

或相近的数量级，可以通过合理调整物理量的单位来实现。这样有利于分析或设计时数值计算的可靠性。

1.3　线性定常系统的传递函数矩阵

对于式(1.2.12)表示的一般多输入-多输出线性定常系统，传递函数矩阵也是描述系统输入-输出关系的一种基本方式。从线性定常系统的状态空间描述，可以导出系统的传递函数矩阵，从而知晓两种不同描述的一些联系。但二者之间更为深刻的联系，涉及系统的能控和能观测问题，将在第 3 章详述。

对于一个多输入-多输出线性定常系统，设其输入为 $u_1(t),\cdots,u_p(t)$，输出为 $y_1(t),\cdots,y_q(t)$，且系统的初始条件为零。$u_i(s)$和 $y_i(s)$分别表示 $u_i(t)$和 $y_i(t)$的 Laplace 变换，$g_{ij}(s)$表示由第 i 个输入端到第 j 个输出端的传递函数。由于系统满足叠加原理，所以有

$$\begin{aligned} y_1(s) &= g_{11}(s)u_1(s)+\cdots+g_{1p}(s)u_p(s) \\ &\vdots \\ y_q(s) &= g_{q1}(s)u_1(s)+\cdots+g_{qp}(s)u_p(s) \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

对应的矩阵向量形式为

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1p}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(s) & \cdots & g_{qp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix} \tag{1.3.2}$$

令

$$\boldsymbol{u}(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_q(s) \end{bmatrix} \tag{1.3.3}$$

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1p}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(s) & \cdots & g_{qp}(s) \end{bmatrix} \tag{1.3.4}$$

那么式(1.3.2)简记为

$$\boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{u}(s) \tag{1.3.5}$$

称矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$为系统的传递函数矩阵。

对于全部的 $g_{ij}(s)$，若其分子多项式的次数小于等于分母多项式的次数；则称 $\boldsymbol{G}(s)$为真有理分式矩阵，或说 $\boldsymbol{G}(s)$是真的；若其分子多项式的次数小于分母多项式的次数，则称 $\boldsymbol{G}(s)$为严格真有理分式矩阵，或说 $\boldsymbol{G}(s)$是严格真的。

作为一个判别准则，若

$$\lim_{s\to\infty}\boldsymbol{G}(s) = \text{非零常值矩阵} \tag{1.3.6}$$

则 $\boldsymbol{G}(s)$是真的；若

$$\lim_{s\to\infty}\boldsymbol{G}(s) = \text{零矩阵} \tag{1.3.7}$$

则 $\boldsymbol{G}(s)$是严格真的。

在式(1.2.12)表示的系统中，设初始条件为零，即 $\boldsymbol{x}(0)=0$。下面推导其传递函数矩阵。

对式(1.2.12)的状态方程和输出方程分别做 Laplace 变换,得

$$s\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) \tag{1.3.8}$$

$$\boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(s) \tag{1.3.9}$$

由式(1.3.8)整理得

$$(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) \tag{1.3.10}$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 代表适当阶数的单位矩阵。于是有

$$\boldsymbol{x}(s) = (s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) \tag{1.3.11}$$

代入式(1.3.9),得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(s) &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(s)\\ &= [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{u}(s)\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

至此,就得到系统的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{1.3.13}$$

式(1.3.13)中的函数矩阵为

$$(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{1.3.14}$$

是从输入 $\boldsymbol{u}$ 到状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的传递函数矩阵;而有

$$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \tag{1.3.15}$$

是状态向量 $\boldsymbol{x}$ 到输出 $\boldsymbol{y}$ 的传递函数矩阵。

以上表达式中的函数矩阵

$$(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \tag{1.3.16}$$

称为预解矩阵,对于计算传递函数矩阵以及与此有关的其他计算分析都很重要。

在传递函数矩阵式(1.3.13)中,

$$(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})} \tag{1.3.17}$$

其中 adj 表示伴随矩阵,其元素是 s 的多项式;det 表示行列式,也是 s 的多项式。注意到矩阵 $\operatorname{adj}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 中每个元素的次数都小于 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 的次数,所以

$$\lim_{s\to\infty}(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = 0 \tag{1.3.18}$$

由此,若式(1.2.12)中 $\boldsymbol{D}\neq 0$,则 $\boldsymbol{G}(\infty)=\boldsymbol{D}$,系统是真的;若 $\boldsymbol{D}=0$,则 $\boldsymbol{G}(\infty)=0$,系统是严格真的。

若 $\boldsymbol{D}=0$,把式(1.3.17)代入式(1.3.13),得

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\boldsymbol{C} * \operatorname{adj}(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) * \boldsymbol{B}}{\det(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})} \tag{1.3.19}$$

根据上式,对于单输入-单输出系统,

$$\boldsymbol{C} * \operatorname{adj}(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) * \boldsymbol{B} \tag{1.3.20}$$

和

$$\det(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \tag{1.3.21}$$

分别就是传递函数的分子和分母多项式。

以式(1.2.13)和式(1.2.14)为例,参数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} \\ -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\dfrac{R_2}{R_1+R_2} \tag{1.3.22}$$

预解矩阵为

$$s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} s+\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L} & s+\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}\end{bmatrix} \tag{1.3.23}$$

传递函数分母为

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=s^2+\frac{R_1R_2C+L}{(R_1+R_2)LC}s+\frac{R_1(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)^2LC} \tag{1.3.24}$$

伴随矩阵为

$$\operatorname{adj}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} s+\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L} \\ -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} & s+\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}\end{bmatrix} \tag{1.3.25}$$

进而

$$C*\operatorname{adj}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})*B=-\frac{R_2(R_1R_2C+L)}{(R_1+R_2)^2LC}s-\frac{R_1R_2(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)^3LC} \tag{1.3.26}$$

于是由式(1.3.13)和式(1.3.19)得系统传递函数

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{-\dfrac{R_2(R_1R_2C+L)}{(R_1+R_2)^2LC}s-\dfrac{R_1R_2(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)^3LC}}{s^2+\dfrac{R_1R_2C+L}{(R_1+R_2)LC}s+\dfrac{R_1(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)^2LC}}+\frac{R_2}{R_1+R_2} \tag{1.3.27}$$

进一步合并,得

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{\dfrac{R_2}{R_1+R_2}s^2}{s^2+\dfrac{R_1R_2C+L}{(R_1+R_2)LC}s+\dfrac{R_1(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)^2LC}} \tag{1.3.28}$$

应当指出,式(1.3.13)只是给出了由系统状态空间表达式计算传递函数矩阵的理论表达式。由于伴随矩阵从概念上说也是计算行列式,复杂度较高,因此有必要考虑计算复杂度相对较小的实用算法。实际上,对于特征多项式 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 和传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$,已有适用于数字计算机的实用计算方法,见参考文献[3]。

1.4 状态空间表达式的建立

建立系统的状态空间表达式主要有两种方法。方法一,是根据系统已有的高阶微分方程或传递函数(矩阵)建立状态空间表达式,属于模型转换。根据传递函数(矩阵)建立状态空间表达式,专业术语称为“实现”,本章仅讨论单输入-单输出的情况;方法二,是根据系统的物理学、经济学、生态学等的自然规律建立起微分方程组或差分方程组,进而导出状态空间表达式,也称为机理建模。

状态空间表达式中最基础的概念是状态变量。不论用哪种方法建立状态空间表达式,其核心都是状态变量的选取。

状态变量作为信号，在系统中总有某个环节与之对应。选取状态变量的过程，本质上就是把系统适当“分解”为各个环节的过程；进而，再把环节之间的固有联系进行新的、等价的描述，就能得到系统的状态空间表达式。

1.4.1　由高阶微分方程建立状态空间表达式

考虑单输入-单输出系统的高阶微分方程描述

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t) \\ &=b_nu^{(n)}(t)+b_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\cdots+b_1u^{(1)}(t)+b_0u(t) \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

对于实际被控对象，输入 $u(t)$ 的最高求导阶次不会超过输出 $y(t)$ 的最高求导阶次；但对于作为控制器的系统，当其中包含微分环节时，$u(t)$ 的最高求导阶次就会超过输出 $y(t)$ 的最高求导阶次。这里只考虑前者。当某些导数项不出现时，认为其对应系数为零。

由于系统状态向量选取的多样性，系统的状态空间表达式自然也不唯一。虽然本质上等价，但模型的可读性和后期分析设计的简便性可能会不同。因此，恰当地选取状态变量，以便得到理想的数学描述，就成了建立状态空间表达式的一个重要的附属要求。

为简化符号表达，我们以3阶系统

$$\dddot{y}(t)+a_1\ddot{y}(t)+a_2\dot{y}(t)+a_3y(t)=b_0\dddot{u}(t)+b_1\ddot{u}(t)+b_2\dot{u}(t)+b_3u(t) \tag{1.4.2}$$

为例，给出由高阶微分方程建立状态空间表达式的两类方法。

方法一：

本方法建立“能观测型”的状态空间表达式。“能观测”的概念，后续章节中有详细解读。

第1步，选取状态变量

$$x_1=\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_2y-b_0\ddot{u}-b_1\dot{u}-b_2u \tag{1.4.3}$$

$$x_2=\dot{y}+a_1y-b_0\dot{u}-b_1u \tag{1.4.4}$$

$$x_3=y-b_0u \tag{1.4.5}$$

第2步，由式(1.4.5)得系统的输出方程

$$y=x_3+b_0u \tag{1.4.6}$$

第3步，建立状态方程。

首先，对式(1.4.3)两端关于时间 t 求导，并结合式(1.4.2)，可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=\dddot{y}+a_1\ddot{y}+a_2\dot{y}-b_0\dddot{u}-b_1\ddot{u}-b_2\dot{u} \\ &=-a_3y+b_3u \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

把输出方程(1.4.6)代入，得到

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=-a_3y+b_3u \\ &=-a_3(x_3+b_0u)+b_3u \\ &=-a_3x_3+(b_3-a_3b_0)u \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

其次，对式(1.4.4)两端关于时间 t 求导，并结合式(1.4.3)，可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_2&=\ddot{y}+a_1\dot{y}-b_0\ddot{u}-b_1\dot{u} \\ &=x_1-a_2y+b_2u \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

把输出方程(1.4.6)代入，得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= x_1 - a_2 y + b_2 u \\ &= x_1 - a_2(x_3 + b_0 u) + b_2 u \\ &= x_1 - a_2 x_3 + (b_2 - a_2 b_0)u\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

最后，对式(1.4.5)两端关于时间 t 求导，并结合合式(1.4.4)，可得

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= \dot{y} - b_0 \dot{u} \\ &= x_2 - a_1 y + b_1 u\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

把输出方程(1.4.6)代入，得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= x_2 - a_1 y + b_1 u \\ &= x_2 - a_1(x_3 + b_0 u) + b_1 u \\ &= x_2 - a_1 x_3 + (b_1 - a_1 b_0)u\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

第 4 步，把状态方程式(1.4.8)、式(1.4.10)、式(1.4.12)和输出方程式(1.4.6)写成矩阵向量形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_3 - a_3 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0\end{bmatrix}u \tag{1.4.13}$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} + b_0 u \tag{1.4.14}$$

在状态方程式(1.4.13)中，系统矩阵的左下角是一个 2 阶的单位矩阵，a_1、a_2、a_3 直接取自高阶微分方程式(1.4.2)，其余元素为 0；在输出方程式(1.4.6)中，输出向量的第 3 个元素是 1，其余为 0。这样的状态空间表达式称为**能观测标准型**，将在第 3 章中详述。

初学者可能对输出方程式(1.4.14)的表达方式产生疑问：用式(1.4.6)来表示不是很简洁吗，为什么要复杂化、引入向量写成式(1.4.14)呢？原因在于，建模不是最终目标；引入状态方程和输出方程的矩阵向量表达，便于基于模型的后续分析和计算。

方法二：

第 1 步，计算系数

$$\begin{cases}\beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0\end{cases} \tag{1.4.15}$$

第 2 步，选取状态变量

$$x_1 = y - \beta_0 u \tag{1.4.16}$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \tag{1.4.17}$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \tag{1.4.18}$$

第 3 步，由式(1.4.16)直接得系统的输出方程

$$y = x_1 + \beta_0 u \tag{1.4.19}$$

第 4 步，建立状态方程。

首先，对式(1.4.16)两端关于时间 t 求导，并结合合式(1.4.17)，可得

$$\dot{x}_1 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} = x_2 + \beta_1 u \tag{1.4.20}$$

类似可得

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \tag{1.4.21}$$

其次,对式(1.4.18)两端关于时间 t 求导,计算可得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= (\dddot{y} - \beta_0 \dddot{u}) - \beta_1 \ddot{u} - \beta_2 \dot{u} \\
&= -(a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y) + b_1 \ddot{u} + b_2 \dot{u} + b_3 u - \beta_1 \ddot{u} - \beta_2 \dot{u} \\
&= -(a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y) + (b_1 - \beta_1) \ddot{u} + (b_2 - \beta_2) \dot{u} + b_3 u \\
&= -(a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y) + a_1 \beta_0 \ddot{u} + (a_2 \beta_0 - a_1 \beta_1) \dot{u} + \\
&\quad (a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1 + a_3 \beta_0 + \beta_3) u \\
&= -a_3 y + a_3 \beta_0 u - a_2 \dot{y} + a_2 \beta_0 \dot{u} + a_2 \beta_1 u - \\
&\quad a_1 \ddot{y} + a_1 \beta_0 \ddot{u} + a_1 \beta_1 \dot{u} + a_1 \beta_2 u + \beta_3 u \\
&= -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u
\end{aligned} \tag{1.4.22}$$

第 5 步,把状态方程式(1.4.20)、式(1.4.21)、式(1.4.22)和输出方程式(1.4.19)写成矩阵向量形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \tag{1.4.23}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u \tag{1.4.24}$$

在状态方程式(1.4.23)中,系统矩阵的右上角是一个 2 阶的单位矩阵,a_1、a_2、a_3 直接取自高阶微分方程式(1.4.2),其余元素为 0。这样的矩阵称为伴侣矩阵(companion matrix),与式(1.4.13)中的系统矩阵互为转置。以 3 阶系统为例,任何一个 3 次多项式

$$f(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \tag{1.4.25}$$

都对应式(1.4.23)中的一个系统矩阵,前者是后者的特征多项式,前者的根就是后者的特征根。这就是伴侣矩阵名称的由来。

输出方程式(1.4.24)中,输出向量的第 1 个元素是 1,其余为 0。

式(1.4.3)~式(1.4.5)和式(1.4.16)~式(1.4.18)表明,对于线性系统,状态变量可以选取为系统的输入、输出及其各阶导数的线性组合。

一个自然而又直接的推论是:状态变量的个数不少于输入变量个数,同时也不少于输出变量个数。

对于一般非线性系统,状态变量可以选取为系统输入、输出及其各阶导数为自变量的代数函数。

状态空间法的一个基本思路是:选取适当的控制输入信号,从而得到满意的状态信号,进而由状态信号得到满意的被控输出信号。而且,由于状态变量之间的耦合,任何品质不好的状态信号最终都会对被控输出产生不利的影响。这样一来,一个控制输入信号如何同时调控多个状态信号,或者一般地说,低维的控制输入信号如何同时调控高维的状态信号,就

成了自动控制的基本问题之一。这一点将在第 3 章详细讨论。

仿照以上两类方法的思路，容易得到 2 阶和 1 阶输入-输出微分方程对应的状态空间表达式。

对于 2 阶输入-输出微分方程

$$\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_2y(t)=b_0\ddot{u}(t)+b_1\dot{u}(t)+b_2u(t) \tag{1.4.26}$$

按照方法一，选取状态变量

$$\begin{cases}x_1=\dot{y}+a_1y-b_0\dot{u}-b_1u\\ x_2=y-b_0u\end{cases} \tag{1.4.27}$$

可得状态空间表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -a_2\\ 1 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_2-a_2b_0\\ b_1-a_1b_0\end{bmatrix}u \tag{1.4.28}$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+b_0u \tag{1.4.29}$$

按照方法二，计算系数

$$\begin{cases}\beta_0=b_0\\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0\\ \beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0\end{cases} \tag{1.4.30}$$

选取状态变量

$$\begin{cases}x_1=y-\beta_0u\\ x_2=y'-\beta_0u'-\beta_1u\end{cases} \tag{1.4.31}$$

可得状态空间表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}u \tag{1.4.32}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\beta_0u \tag{1.4.33}$$

对于 1 阶输入-输出微分方程

$$\dot{y}(t)+a_1y(t)=b_0\dot{u}(t)+b_1u(t) \tag{1.4.34}$$

按照方法一，选取状态变量

$$x=y-b_0u \tag{1.4.35}$$

可得状态空间表达式

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-a_1x+(b_1-a_1b_0)u\\ y&=x+b_0u\end{aligned} \tag{1.4.36}$$

按照方法二，计算系数

$$\begin{cases}\beta_0=b_0\\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0\end{cases} \tag{1.4.37}$$

选取状态变量

$$x=y-\beta_0u \tag{1.4.38}$$

可得状态空间表达式

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_1 x + \beta_1 u \\ y &= x + \beta_0 u\end{aligned} \tag{1.4.39}$$

基于式(1.4.37),对比式(1.4.36)和式(1.4.39),不同之处仅在于状态方程中 u 和输出方程中 x 二者系数的互换。

1.4.2 由传递函数建立状态空间表达式

传递函数和输入-输出高阶微分方程之间明确的对应关系。因此,可以根据传递函数写出系统的高阶微分方程,再按照处理高阶微分方程的方法建立状态空间表达式。以下主要关注怎样由传递函数直接建立状态空间表达式。

传递函数是表示整个系统的。为了选取状态变量建立状态空间表达式,就必须对传递函数进行拆分。

1. 直接分解

我们以 3 阶系统为例来进行说明。一个 3 阶系统的传递函数总可以表示为

$$g(s) = \frac{b(s)}{a(s)} + b_0 = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} + b_0 \tag{1.4.40}$$

其中系数 b_0、b_1、b_2、b_3 有些可能为零。

在零初始条件下,系统输入 $u(t)$和输出 $y(t)$满足

$$\begin{aligned}y(s) &= \frac{b(s)}{a(s)}u(s) + b_0 u(s) \\ &= b(s) \times \frac{1}{a(s)}u(s) + b_0 u(s)\end{aligned} \tag{1.4.41}$$

把 $b(s)/a(s)$表示为 $b(s)$和 $1/a(s)$的乘积,这就是"直接分解"名称的由来。

定义变量

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{a(s)}u(s) = \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}u(s) \tag{1.4.42}$$

则有

$$\dddot{\bar{y}}(t) + a_1\ddot{\bar{y}}(t) + a_2\dot{\bar{y}}(t) + a_3\bar{y}(t) = u(t) \tag{1.4.43}$$

和

$$y(s) = b(s)\ \bar{y}(s) + b_0 u(s) \tag{1.4.44}$$

选取状态变量

$$x_1(t) = \bar{y}(t),\quad x_2(t) = \dot{\bar{y}}(t),\quad x_3(t) = \ddot{\bar{y}}(t) \tag{1.4.45}$$

于是得到状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{\bar{y}}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{\bar{y}}(t) = x_3(t)\end{aligned} \tag{1.4.46}$$

结合式(1.4.43)得

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) &= \dddot{\bar{y}}(t) \\ &= -a_1\ddot{\bar{y}}(t) - a_2\dot{\bar{y}}(t) - a_3\bar{y}(t) + u(t) \\ &= -a_3 x_1(t) - a_2 x_2(t) - a_1 x_3(t) + u(t)\end{aligned} \tag{1.4.47}$$

由式(1.4.44)可得输出方程

$$
\begin{aligned}
y(t) &= b_1\ddot{\bar{y}}(t) + b_2\dot{\bar{y}}(t) + b_3\bar{y}(t) + b_0u(t) \\
&= b_1x_3(t) + b_2x_2(t) + b_3x_1(t) + b_0u(t)
\end{aligned} \tag{1.4.48}
$$

状态方程式(1.4.46)、式(1.4.47)和输出方程式(1.4.48)的矩阵向量形式为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{1.4.49}
$$

$$
y = \begin{bmatrix} b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + b_0 u \tag{1.4.50}
$$

状态方程(1.4.49)称为能控标准型，将在第 3 章中详述。其系统矩阵是伴侣矩阵，输入向量的第 3 个元素是 1，其余为 0。

在上述过程中，若 $b(s)=k$ 为非零常数，则有

$$
y(s) = k\,\bar{y}(s) + b_0u(s) \tag{1.4.51}
$$

这时，状态变量(1.4.45)就是系统输入 $u(t)$和输出 $y(t)$及其各阶变化率的线性组合；若进一步有 $b_0=0$，则

$$
y(s) = k\,\bar{y}(s) \tag{1.4.52}
$$

状态变量式(1.4.45)简化为系统输出 $y(t)$及其各阶变化率；除此之外，若多项式 $b(s)$的次数$\geqslant 1$，即系统存在有限零点，状态变量的物理含义可能不再直观。

仿照以上思路，一个 2 阶传递函数

$$
g(s) = \frac{b_1s + b_2}{s^2 + a_1s + a_2} + b_0 \tag{1.4.53}
$$

的能控标准型状态空间表达式为

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + b_0u
\end{aligned} \tag{1.4.54}
$$

根据式(1.2.13)和式(1.2.14)的传递函数式(1.3.24)，依托式(1.4.53)和式(1.4.54)可得其能控标准型状态空间描述

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{R_1(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)^2LC} & -\dfrac{R_1R_2C+L}{(R_1+R_2)LC} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\
u_{R_2}(t) &= \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1R_2(R_2-R_1)}{(R_1+R_2)^3LC} & -\dfrac{R_2(R_1R_2C+L)}{(R_1+R_2)^2LC} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \frac{R_2}{R_1+R_2} e(t)
\end{aligned} \tag{1.4.55}
$$

从输出方程各物理量的单位分析，状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$的含义并不明确。

类似可得 1 阶传递函数

$$
g(s) = \frac{b_1}{s + a_1} + b_0 \tag{1.4.56}
$$

的能控标准型状态空间表达式为

$$\dot{x} = -a_1 x + u, \quad y = b_1 x + b_0 u \tag{1.4.57}$$

总结以上结果可以看出,若输入-输出高阶微分方程中输入的最高次导数项系数不为0,或等价地说,传递函数分子分母次数相同,则对应的状态空间表达式中必然存在输入到输出的直接传递项。

重新考察状态方程式(1.4.47),将其改写为

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= -a_1 x_3 + (u - a_3 x_1 - a_2 x_2)\\ &= -a_1 x_3 + \begin{bmatrix}1 & -a_3 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.4.58}$$

按照状态方程的定义,作为系统状态变量的 x_1 和 x_2,同时也是以 x_3 为状态变量的局部子系统的输入。这既显示了信号身份的多重性,也能为系统的分析和设计提供思路。

信号身份的多重性的另外一个例子是式(1.4.14):若 $b_0=0$,则 $y=x_3$。这表明:x_3 既是状态变量,又是系统输出。

2. 串联分解

串联分解的目标是:根据系统的传递函数建立状态空间表达式,并把输入决定输出的动态过程表示为一系列1阶或2阶子系统相串联的形式,如图1.4.1所示。这种方式决定了不存由输入到输出的直接传递项,即传递函数中分子次数低于分母次数,是严格真有理分式。

图1.4.1 子系统的串联

由状态方程式(1.4.49)描述的 x_1、x_2 和 x_3,就是串联关系的特例。

一个实数系数多项式总可以分解为1次和(或)2次因式的乘积,且所有的系数仍为实数。存在2次因式的原因是共轭复根。

1) 串联分解的一般方法

串联分解要把高阶传递函数分解为1阶和(或)2阶传递函数(分母次数是2,分子的次数≤2)的乘积。为了保证在状态空间表达式中所有的量都是实数,有时2阶传递函数作为因子是必要的。分解可以按照以下步骤进行:

第1步,把高阶传递函数的分母分解为1次和(或)2次因式的乘积。实根对应1次因式,共轭复根对应2次因式。

第2步,若高阶传递函数的分子多项式次数≥1,将其分解为常数、1次和(或)2次因式的乘积。

第3步,根据因式分解的结果把高阶传递函数表示为1阶和(或)2阶传递函数的乘积。唯一的要求是,分子次数不超过分母次数。

以上分解的结果显然不是唯一的,即便高阶传递函数分子为常数,也是如此。

由于被分解的高阶传递函数是严格真有理分式,分解之后至少有一个传递函数因子是严格真有理分式。

考虑一个 4 阶系统

$$g(s)=\frac{b_1(s+b_2)(s^2+b_{31}s+b_{32})}{(s+a_1)(s+a_2)(s^2+a_{31}s+a_{32})} \tag{1.4.59}$$

其中 $b_1\neq 0, a_{31}^2<4a_{32}^2$,即系统存在共轭极点。对于其他参数没有任何要求,包括可能出现的重根。定义

$$g_1(s)=\frac{b_1}{s+a_1} \tag{1.4.60}$$

$$g_2(s)=\frac{s+b_2}{s+a_2}=\frac{b_2-a_2}{s+a_2}+1 \tag{1.4.61}$$

$$g_3(s)=\frac{s^2+b_{31}s+b_{32}}{s^2+a_{31}s+a_{32}}=\frac{(b_{31}-a_{31})s+(b_{32}-a_{32})}{s^2+a_{31}s+a_{32}}+1 \tag{1.4.62}$$

按照图 1.4.1 建立系统的串联分解。这里子系统 $g_1(s)$、$g_2(s)$、$g_3(s)$的不同顺序会导致最终结果的不同,但表示第 1 个子系统的传递函数要求是严格真有理分式。

以下的过程,关键是明确每个子系统的输入和输出,然后按照已有的 1 阶和(或)2 阶传递函数的处理方法建立各个子系统的状态空间表达式。

对于第 1 个子系统,输入和输出分别是 u 和 y_1。按照式(1.4.56)和式(1.4.57),可得

$$\dot{x}_1=-a_1x_1+u \tag{1.4.63}$$

$$y_1=b_1x_1 \tag{1.4.64}$$

对于第 2 个子系统,输入和输出分别是 y_1 和 y_2。按照式(1.4.56)和式(1.4.57),可得

$$\dot{x}_2=-a_2x_2+y_1=-a_2x_2+b_1x_1 \tag{1.4.65}$$

$$y_2=x_2+(b_2-a_2)y_1=x_2+(b_2-a_2)b_1x_1 \tag{1.4.66}$$

对于第 3 个子系统,输入和输出分别是 y_2 和 y。按照式(1.4.53)~式(1.4.55),可得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{31}\\ \dot{x}_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_{32} & -a_{31}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{31}\\ x_{32}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}y_2 \tag{1.4.67}$$

$$y=\begin{bmatrix}(b_{32}-a_{32}) & (b_{31}-a_{31})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{31}\\ x_{32}\end{bmatrix}+y_2 \tag{1.4.68}$$

根据式(1.4.67)和式(1.4.66),有

$$\begin{aligned}\dot{x}_{31}&=x_{32}\\ \dot{x}_{32}&=-a_{32}x_{31}-a_{31}x_{32}+y_2\\ &=-a_{32}x_{31}-a_{31}x_{32}+x_2+(b_2-a_2)b_1x_1\end{aligned} \tag{1.4.69}$$

由式(1.4.63)、式(1.4.65)和式(1.4.69)得状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_{31}\\ \dot{x}_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1 & 0 & 0 & 0\\ b_1 & -a_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ (b_2-a_2)b_1 & 1 & -a_{32} & -a_{31}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_{31}\\ x_{32}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u \tag{1.4.70}$$

根据式(1.4.68)和式(1.4.66),得输出方程

$$y=[(b_{32}-a_{32})\quad(b_{31}-a_{31})]\begin{bmatrix}x_{31}\\x_{32}\end{bmatrix}+x_2+(b_2-a_2)b_1x_1$$

$$=[(b_2-a_2)b_1\quad 1\quad(b_{32}-a_{32})\quad(b_{31}-a_{31})]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_{31}\\x_{32}\end{bmatrix}\tag{1.4.71}$$

若定义

$$\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}x_{31}\\x_{32}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0\\(b_2-a_2)b_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\tag{1.4.72}$$

则状态方程(1.4.70)等价于如下形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{\boldsymbol{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1&0&0_{1\times2}\\b_1&-a_2&0_{1\times2}\\\boldsymbol{c}&\boldsymbol{d}&\boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0_{2\times1}\end{bmatrix}u\tag{1.4.73}$$

在系统矩阵中,非对角元素表示状态变量之间的耦合;在分块矩阵的场合,非对角的分块表示不同子系统之间状态变量的耦合关系。

状态方程式(1.4.73)在结构和信号方面具有以下特征:

第一,系统矩阵为下三角矩阵,或分块下三角矩阵;控制向量第 1 个子块非零,其余元素为零。

第二,上述状态方程具有级联结构,即子系统是有顺序的。顺序的改变一般会带来系统的表示的改变。

第三,输入直接影响第 1 个状态变量,依次间接影响其他状态变量。

第四,状态变量之间单向解耦,即每个子系统的状态变量和它前面子系统的状态变量有关,而和后面子系统的状态变量无关。

对于串联分解,每个局部子系统建模方式的多种多样,这是继传递函数乘积分解之外,导致最终整个状态空间表达式的结果不唯一的另一因素。

在串联分解中,前一个子系统的输出恰为后面相邻子系统的输入。注意到子系统维数都不高,这实际上为解决低维控制输入如何调节高维状态向量的问题提供了一种思路。

2) 串联分解的特殊情况

以上讨论了建立串联分解的一般方法,下面就传递函数具有多重极点的两种特殊情况讨论串联分解。

先来考虑一个具有 3 重实数极点的系统严格真传递函数

$$g(s)=\frac{b(s)}{(s+a)^3}\tag{1.4.74}$$

选取状态变量

$$x_1(s)=\frac{u(s)}{(s+a)^3},\quad x_2(s)=\frac{u(s)}{(s+a)^2},\quad x_3(s)=\frac{u(s)}{s+a}\tag{1.4.75}$$

于是有

$$x_1(s)=\frac{1}{s+a}x_2(s),\quad x_2(s)=\frac{1}{s+a}x_3(s),\quad x_3(s)=\frac{1}{s+a}u(s)\tag{1.4.76}$$

得到状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -ax_1(t)+x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -ax_2(t)+x_3(t)\\ \dot{x}_3(t) &= -ax_3(t)+u(t)\end{aligned} \tag{1.4.77}$$

状态变量之间显然是串联结构。

同时，式(1.4.74)总存在分解

$$g(s)=\frac{b(s)}{(s+a)^3}=\frac{c_1}{(s+a)^3}+\frac{c_2}{(s+a)^2}+\frac{c_3}{s+a} \tag{1.4.78}$$

其中 c_1、c_2、c_3 为常数。因此，由 $y(s)=g(s)u(s)$得

$$\begin{aligned}y(s)&=\frac{c_1}{(s+a)^3}u(s)+\frac{c_2}{(s+a)^2}u(s)+\frac{c_3}{s+a}u(s)\\ &=c_1x_1(s)+c_2x_2(s)+c_3x_3(s)\end{aligned} \tag{1.4.79}$$

输出方程是

$$y(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+c_3x_3(t) \tag{1.4.80}$$

状态方程的矩阵向量形式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a & 1 & 0\\ 0 & -a & 1\\ 0 & 0 & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \tag{1.4.81}$$

这里系统矩阵是 Jordan(若当)块，属于上三角矩阵；输入向量最后一个元素非零，其余元素都是 0。这些特征虽然和式(1.4.73)不一致，但二者串联的本质却是一致的。

一个有共轭极点的 2 阶传递函数，在实数范围内不存在串联分解。一种解释是：其传递函数的分母不能分解为实系数一次因式的乘积；注意到 2 阶传递函数的串联分解，其系统矩阵一定是上三角矩阵或下三角矩阵。但这样的实数矩阵，其对角元即为特征值，也就是传递函数的极点，显然无法拥有共轭极点。这是另外一种解释。

考虑具有共轭极点的严格真传递函数

$$g(s)=\frac{b_1s+b_2}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \tag{1.4.82}$$

的一种状态空间表达式，其中 $\beta\neq 0$。系统具有一对共轭复根 $\alpha\pm \mathrm{j}\beta$。

选取状态变量

$$\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\begin{bmatrix}s-\alpha & \beta\\ -\beta & s-\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u(s) \tag{1.4.83}$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\begin{bmatrix}-s+(\alpha+\beta)\\ s-(\alpha-\beta)\end{bmatrix}u(s) \tag{1.4.84}$$

由式(1.4.83)得

$$\begin{bmatrix}s-\alpha & -\beta\\ \beta & s-\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u(s) \tag{1.4.85}$$

整理得

$$
\begin{aligned}
sx_1(s) &= \alpha x_1(s) + \beta x_2(s) - u(s) \\
sx_2(s) &= -\beta x_1(s) + \alpha x_2(s) + u(s)
\end{aligned} \tag{1.4.86}
$$

状态方程是

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) - u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\beta x_1(t) + \alpha x_2(t) + u(t)
\end{aligned} \tag{1.4.87}
$$

对应的矩阵向量形式为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(s) \tag{1.4.88}
$$

输出方程是

$$
y(t) = \frac{1}{2\beta} \begin{bmatrix} (\alpha - \beta)b_1 + b_2 & (\alpha + \beta)b_1 + b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{1.4.89}
$$

读者可以从式(1.4.82)和式(1.4.84)尝试推导。

当高阶传递函数具有重数大于等于 2 的共轭极点时,可以建立类似于式(1.4.81)的、分块形式的串联结构。考虑具有 3 重共轭极点的严格真传递函数

$$
g(s) = \frac{b(s)}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^3} \tag{1.4.90}
$$

的一种串联形式的状态方程的建立,其中 $\beta \neq 0$。

选取状态变量

$$
\boldsymbol{x}_3(s) = \begin{bmatrix} x_{31}(s) \\ x_{32}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} \begin{bmatrix} s-\alpha & \beta \\ -\beta & s-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(s) \tag{1.4.91}
$$

$$
\boldsymbol{x}_2(s) = \begin{bmatrix} x_{21}(s) \\ x_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} \begin{bmatrix} s-\alpha & \beta \\ -\beta & s-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31}(s) \\ x_{32}(s) \end{bmatrix} \tag{1.4.92}
$$

$$
\boldsymbol{x}_1(s) = \begin{bmatrix} x_{11}(s) \\ x_{12}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} \begin{bmatrix} s-\alpha & \beta \\ -\beta & s-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21}(s) \\ x_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{1.4.93}
$$

参照建立式(1.4.88)的思路可得状态方程

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_{11}(t) \\ \dot{x}_{12}(t) \\ \dot{x}_{21}(t) \\ \dot{x}_{22}(t) \\ \dot{x}_{31}(t) \\ \dot{x}_{32}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \\ x_{31}(t) \\ x_{32}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{1.4.94}
$$

状态方程(1.4.94)中的系统矩阵,是 3 重共轭复根 $\alpha \pm \mathrm{j}\beta$ 对应的实 Jordan 块,是分块上三角矩阵,属于实 Jordan 型矩阵的一种特殊情况。若记

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.95}
$$

则该系统矩阵可简记为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \tag{1.4.96}$$

其中 0 代表 2 行 2 列的零矩阵。注意其中包含 2 阶单位矩阵作为子块。

状态方程(1.4.94)表明，输入 $u(t)$ 和 3 个以 $x_3(t)$、$x_2(t)$、$x_1(t)$ 为状态向量的子系统是串联关系。

传递函数(1.4.90)总存在分解

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{b(s)}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]^3} \\ &= \frac{c_3 s + d_3}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]^3} + \frac{c_2 s + d_2}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]^2} + \frac{c_1 s + d_1}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \end{aligned} \tag{1.4.97}$$

c_i 和 d_i 是待定常数。读者可据此和式(1.4.91)～式(1.4.93)尝试推导输出方程。

3．并联分解

并联分解的目标是，根据系统的传递函数建立状态空间表达式，并把输入决定输出的动态过程表示为一系列低阶子系统相并联的形式：

(1) 原系统的输入是各个子系统的共同输入；

(2) 各个子系统输出之和为原系统输出(可能仅为一部分，要考虑是否有直接传递项)；

(3) 子系统之间解耦，即各个子系统的状态变量之间没有直接关联，如图 1.4.2 所示。

这种方式关注输入决定输出的动态过程，对于输入到输出的直接传递项没有特别要求。

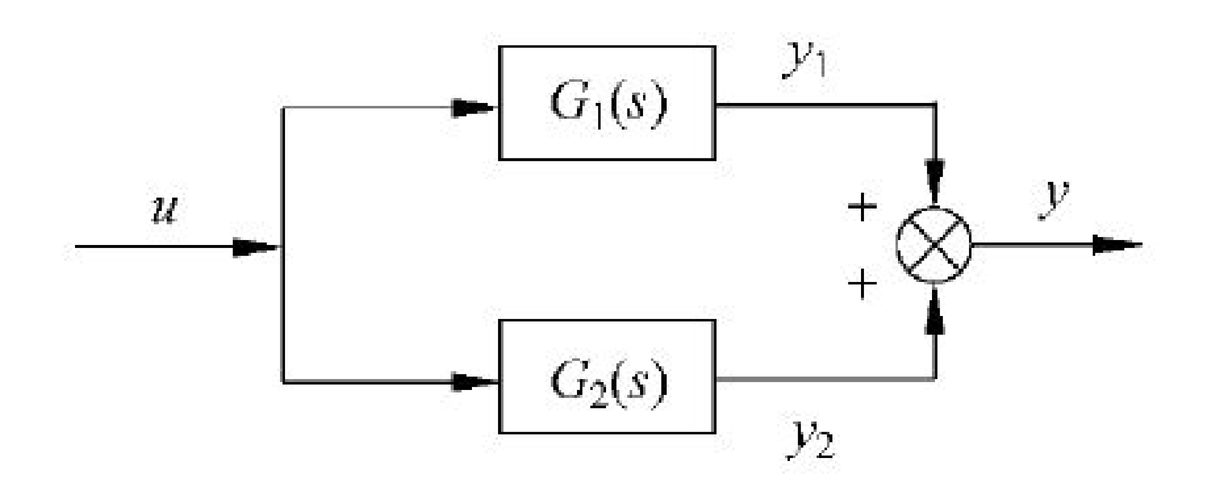


图 1.4.2　子系统的并联

并联分解要把高阶传递函数(严格真有理真分式)

$$g(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-a_1)^{n_1}\cdots(s+p_1 s+q_1)^{m_1}\cdots} \tag{1.4.98}$$

分解为低阶严格真有理真分式的加和

$$g(s) = \frac{U_1(s)}{(s-a_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{V_1(s)}{(s+p_1 s+q_1)^{m_1}} + \cdots \tag{1.4.99}$$

其中 a_i、p_i、q_i 为实数，a_i 互异，二元组 (p_i, q_i) 互异；$p_i^2 < 4q_i$，即对应共轭复根，$n_i, m_i \geqslant 1$；$U_i(s)$，$V_i(s)$ 为系数待定的多项式，次数分别低于 n_i 和 m_i。

分解可以参照以下步骤进行：

第 1 步，把高阶传递函数的分母分解为 1 次和(或)2 次因式的乘积。实根对应 1 次因式，共轭复根对应 2 次因式。

第 2 步，对高阶传递函数进行形如式(1.4.99)的分解。

第 3 步，为每个低阶传递函数 $U_i(s)/(s-a_i)^{n_i}$ 和 $V_i(s)/(s+p_i s+q_i)^{m_i}$ 建立状态空间表达式

$$\dot{x}_i(t)=A_i x_i(t)+b_i u(t),y_i(t)=c_i x_i(t) \tag{1.4.100}$$

具体方式不限。

第4步,高阶传递函数并联形式的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\vdots\\ \dot{x}_i(t)\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & A_i & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ x_i(t)\\ \vdots\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\vdots\\ b_i\\ \vdots\end{bmatrix}u(t),\quad y(t)=\sum_i c_i x_i(t) \tag{1.4.101}$$

状态方程(1.4.101)在结构和信号方面具有以下特征:

(1) 系统矩阵为分块对角矩阵;各个输入向量 b_i、输出向量 c_i 均不为零。

(2) 各个子系统的地位是平等的,即子系统没有先后顺序的区别。

(3) 输入直接同时影响各个子系统。

(4) 由于系统矩阵中表示各个子系统状态关联的非对角块都是零块,所以子系统之间双向解耦,即子系统状态变量之间不存在耦合。

与串联分解类似,由于每个局部子系统建模方式的多种多样,并联分解最终整个状态空间表达式的结果也不是唯一的。

由于严格真有理分式 $g(s)$ 总存在如下分解:

$$g(s)=\frac{A_{n_1}}{(s-a_1)^{n_1}}+\frac{A_{n_1-1}}{(s-a_1)^{n_1-1}}+\cdots+\frac{A_1}{s-a_1}+\cdots+$$
$$\frac{B_{m_1}s+C_{m_1}}{(s+p_1s+q_1)^{m_1}}+\frac{B_{m_1-1}s+C_{m_1-1}}{(s+p_1s+q_1)^{m_1-1}}+\cdots+\frac{B_1s+C_1}{s+p_1s+q_1}+\cdots \tag{1.4.102}$$

其中 a_i、p_i、q_i 为实数,a_i 互异,二元组 (p_i,q_i) 互异;$p_i^2<4q_i$,n_i,$m_i\geqslant 1$;所以,通过把式(1.4.102)中的项进行适当合并,式(1.4.99)形式的分解总能实现。

在串联分解中,每个参与串联的子系统是1阶或2阶的。但在并联分解中,参与并联的子系统未必都是1阶或2阶的。这是因为,在分解式(1.4.99)中可能会出现式(1.4.74)或式(1.4.90)那样的传递函数。一方面,这样的传递函数对应的任何一种实数表示的状态方程,其状态变量之间都必然是耦合的,即不存在并联分解;另一方面,这样的传递函数阶次显然高于2阶,对应的子系统阶次自然高于2阶。

在并联分解中,输出是各个子系统状态的线性组合。假设输入 $u(t)$ 是控制输入,那么这时形式上就出现一个控制信号 $u(t)$ 如何同时调控多个孤立的状态向量的问题。

总结直接分解、串联分解和并联分解,很多时候状态变量并不具有明确的物理含义。这是为了保证系统特定描述形式而付出的代价。

1.4.3 机理建模

按照系统的运行机理建立状态空间表达式,本质就是状态变量的选取和信号替换,可以参考以下步骤:

第1步,确认输入、输出信号;

第2步,选定某些信号作为状态变量:电容电压、电感电流;质点位移、速度;角位移、角速度等,个数为储能元件(电容、电感、质量、转动惯量等)总数;

第3步,根据物理规律建立若干等式,其个数等于状态变量个数;

第4步,全部信号用状态变量及其1阶导数、输入和元件参数来替换,要保证全部状态

变量的 1 阶导数都出现；

第 5 步，将全部状态变量的 1 阶导数看作形式上的未知量，求解方程组，从而得到各个状态方程；

第 6 步，用状态、输入表示各个输出，得到输出方程(只能是代数方程，不能出现信号的导数)；

第 7 步，如果是线性系统，将状态方程和输出方程改写为矩阵向量形式。

进行机理建模，理论基础是第 3 步。如果没有明确的等式规律可以利用，机理建模也就无从谈起。

第 2 步中状态变量的选取原则，仅是出于直接利用物理规律的需要，是为了建模的方便。后续会看到，状态变量的选取方式实际上多种多样。

【例 1.4.1】 考虑图 1.4.3 所示的 RLC 电路，输入为电源电压 $e(t)$，输出取为电阻 R_2 的端电压 $u_{R_2}(t)$。按照上述步骤建立相应的状态空间描述。

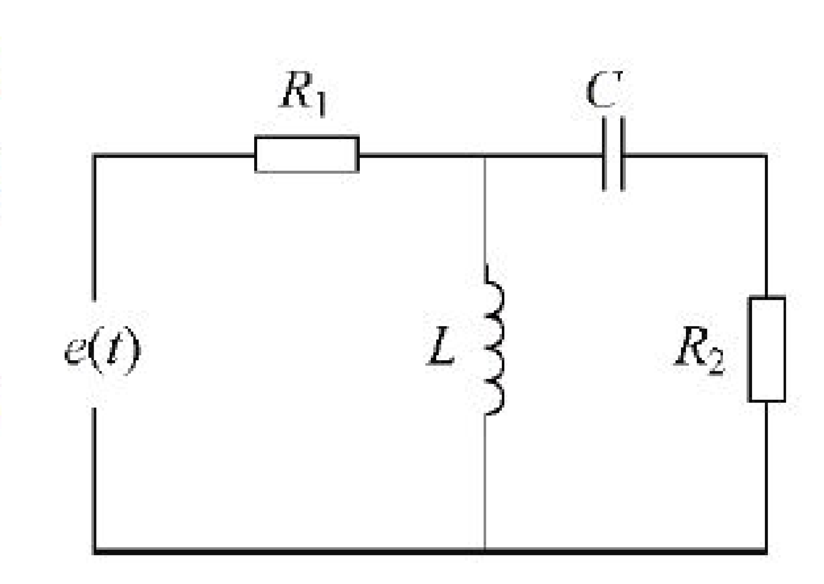


图 1.4.3　RLC 电路

① 根据已知信息，输入为电源电压 $e(t)$，输出为电阻 R_2 的端电压 $u_{R_2}(t)$。

② 储能元件为电容和电感；选取 $u_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 为状态变量。

③ 对于 R_2-L-C，有

$$u_L(t) = u_C(t) + u_{R_2}(t) \tag{1.4.103}$$

对于 $e(t)-R_1-L$，有

$$e(t) = R_1[i_L(t) + i_C(t)] + u_L(t) \tag{1.4.104}$$

④ 把式(1.4.103)和式(1.4.104)中的信号替换为状态 $u_C(t)$、$i_L(t)$及其 1 阶导数 $\dot{u}_C(t)$、$\dot{i}_L(t)$以及输入 $e(t)$：

$$R_2C\dot{u}_C(t) - L\dot{i}_L(t) = -u_C(t) \tag{1.4.105}$$

$$R_1C\dot{u}_C(t) + L\dot{i}_L(t) = -R_1i_L(t) + e(t) \tag{1.4.106}$$

⑤ 把状态的 1 阶导数 $\dot{u}_C(t)$、$\dot{i}_L(t)$看作形式上的未知量，求解方程式(1.4.105)和式(1.4.106)得状态方程：

$$\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{(R_1+R_2)C}u_C(t) - \frac{R_1}{(R_1+R_2)C}i_L(t) + \frac{1}{(R_1+R_2)C}e(t) \tag{1.4.107}$$

$$\dot{i}_L(t) = -\frac{1}{(R_1+R_2)L}u_C(t) - \frac{R_1}{(R_1+R_2)L}i_L(t) + \frac{1}{(R_1+R_2)L}e(t) \tag{1.4.108}$$

⑥ 用状态 $u_C(t)$、$i_L(t)$、输入 $e(t)$表示输出 $u_{R_2}(t)$：

$$u_{R_2}(t) = R_2i_C = R_2C\dot{u}_C \tag{1.4.109}$$

输出方程不能包含导数项，把式(1.4.107)代入式(1.4.109)计算，得到输出方程

$$u_{R_2}(t) = -\frac{R_2}{R_1+R_2}u_C(t) - \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L(t) + \frac{R_2}{R_1+R_2}e(t) \tag{1.4.110}$$

⑦ 注意到式(1.4.107)、式(1.4.108)和式(1.4.110)右端都是关于状态 $u_C(t)$、$i_L(t)$以及输入 $e(t)$的线性组合，是线性系统，因此可将其写成矩阵向量形式

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C(t) \\ \dot{i}_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1+R_2)C} & -\frac{R_1}{(R_1+R_2)C} \\ -\frac{R_1}{(R_1+R_2)L} & -\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1+R_2)C} \\ \frac{R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} e(t) \tag{1.4.111}$$

$$u_{R_2}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1+R_2} & -\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \frac{R_2}{R_1+R_2} e(t) \tag{1.4.112}$$

在③中,式(1.4.103)和式(1.4.104)的选取并不是唯一的。从描述系统变化规律且相互独立的任意两个方程出发,都可以得到系统的状态方程和输出方程,虽然过程会有简繁之分。

对于有明确力学规律但受力分析复杂的系统,通常可从能量和广义能量的观点出发,利用拉格朗日-欧拉方程建立系统的动力学模型,这样可以简化建模过程。参见理论力学或分析力学的相关内容。这种思路还可以推广到电磁系统,利用广义的拉格朗日-欧拉方程进行建模,避开复杂的电路分析。

1.5　组合系统的状态空间描述

由两个或两个以上的子系统按照一定方式联结而构成的系统称为组合系统。组合的基本方式可分为串联、并联和反馈3种类型。不论在分析阶段还是设计阶段,一个比较复杂的实际系统,往往就是基于各种联结方式的组合系统。

由子系统的状态空间描述建立组合系统的状态空间描述,关键有3点:

① 联结条件,即子系统的输入、输出维数特征;

② 输入、输出信号的身份多重性或信号运算;

③ 信号替换,因为状态方程里面不能有状态和输入以外的信号。

考虑两个子系统

$$S_1: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1(t) \\ \boldsymbol{y}_1(t) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t) \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_2(t) = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2(t) \\ \boldsymbol{y}_2(t) = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t) + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}_2(t) \end{cases} \tag{1.5.1}$$

其传递函数矩阵分别为$\boldsymbol{G}_1(s)$和$\boldsymbol{G}_2(s)$。下面就3种基本组合方式,给出组合系统的状态空间描述。

1. 子系统的串联

考虑如图1.5.1所示的由子系统S_1和S_2经过串联构成的组合系统,子系统的传递函数矩阵分别为$\boldsymbol{G}_1(s)$和$\boldsymbol{G}_2(s)$。

图1.5.1　子系统的串联

S_1和S_2可以串联联结的条件是:

$$\dim(\boldsymbol{y}_1) = \dim(\boldsymbol{u}_2) \tag{1.5.2}$$

这里dim表示向量的维数。

在按照$S_1 \to S_2$的顺序串联后,组合系统在变量上具有以下特点:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1,\quad \boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{y}_1,\quad \boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{y} \tag{1.5.3}$$

下面以式(1.5.1)和式(1.5.3)为基础，推导组合系统的状态方程和输出方程。

首先，

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1(t)\\&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)&=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2(t)\\&=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}_1(t)\\&=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t)]\\&=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t)]\\&=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

式(1.5.4)和式(1.5.5)就是组合系统的状态方程，也可表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0\\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t) \tag{1.5.6}$$

然后推导组合系统的输出方程：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{y}_2\\&=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}_2(t)\\&=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{y}_1(t)\\&=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t)]\\&=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t)]\\&=\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

也可进一步表示为

$$\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\quad \boldsymbol{C}_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t) \tag{1.5.8}$$

由图 1.5.1 和式(1.5.3)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(s)&=\boldsymbol{y}_2(s)\\&=\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{u}_2(s)\\&=\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{y}_1(s)\\&=\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}_1(s)\\&=\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}(s)\end{aligned} \tag{1.5.9}$$

所以组合系统的传递函数矩阵是

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s) \tag{1.5.10}$$

注意式中乘积的顺序，因为一般来说矩阵乘法不满足交换律。

子系统串联组合，状态方程最显著的特征在于，系统矩阵是分块上三角(或下三角)矩阵。这体现了子系统状态之间的单向耦合。

子系统串联组合与传递函数串联分解建立状态空间描述相比，共同之处在于系统矩阵的三角结构；不同之处在于，后者输入直接影响第 1 个子系统，依次间接影响其余子系统，而前者中，各个子系统同时受到输入的直接和间接影响。当然，前者的输入、输出不再局限于单变量。

2. 子系统的并联

考虑如图1.5.2所示的由子系统 S_1 和 S_2 经过并联构成的组合系统,子系统的传递函数矩阵分别为 $\boldsymbol{G}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_2(s)$。

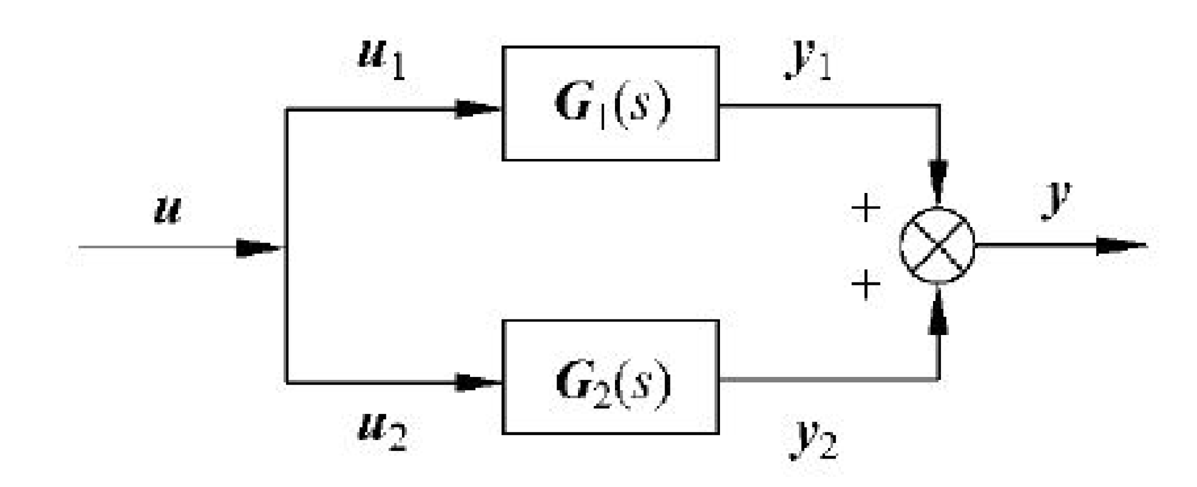


图1.5.2　子系统的并联

S_1 和 S_2 可以并联联结的条件是:

$$\dim(\boldsymbol{u}_1)=\dim(\boldsymbol{u}_2),\quad \dim(\boldsymbol{y}_1)=\dim(\boldsymbol{y}_2) \tag{1.5.11}$$

子系统 S_1 和 S_2 并联后,组合系统在变量上具有以下特点:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2,\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2 \tag{1.5.12}$$

根据这些信号特点易得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1(t)\\&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(t)\\\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)&=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2(t)\\&=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{1.5.13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2\\&=[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t)]+[\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}_2(t)]\\&=[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}(t)]+[\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}(t)]\\&=[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)]+[\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2]\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{1.5.14}$$

以上就是并联组合系统的状态方程和输出方程,也可进一步表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\\\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&0\\0&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\\boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t) \tag{1.5.15}$$

$$\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{C}_1\quad\boldsymbol{C}_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\\boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+[\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2]\boldsymbol{u}(t) \tag{1.5.16}$$

由图1.5.2和式(1.5.12)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(s)&=\boldsymbol{y}_1(s)+\boldsymbol{y}_2(s)\\&=\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}_1(s)+\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{u}_2(s)\\&=\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}(s)+\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{u}(s)\\&=[\boldsymbol{G}_1(s)+\boldsymbol{G}_2(s)]\boldsymbol{u}(s)\end{aligned} \tag{1.5.17}$$

所以组合系统的传递函数矩阵是

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{G}_1(s)+\boldsymbol{G}_2(s) \tag{1.5.18}$$

子系统串联组合,状态方程最显著的特征在于,系统矩阵是分块对角矩阵。这表明子系统状态之间是完全解耦的。

子系统并联组合与传递函数并联分解建立状态空间描述相比,共同之处在于系统矩阵

的分块对角结构；不同之处在于，前者的输入、输出不再局限于单变量。

3. 子系统的反馈联结

考虑如图 1.5.3 所示的由子系统 S_1 和 S_2 经过反馈联结构成的组合系统，子系统的传递函数矩阵分别为 $\boldsymbol{G}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_2(s)$。

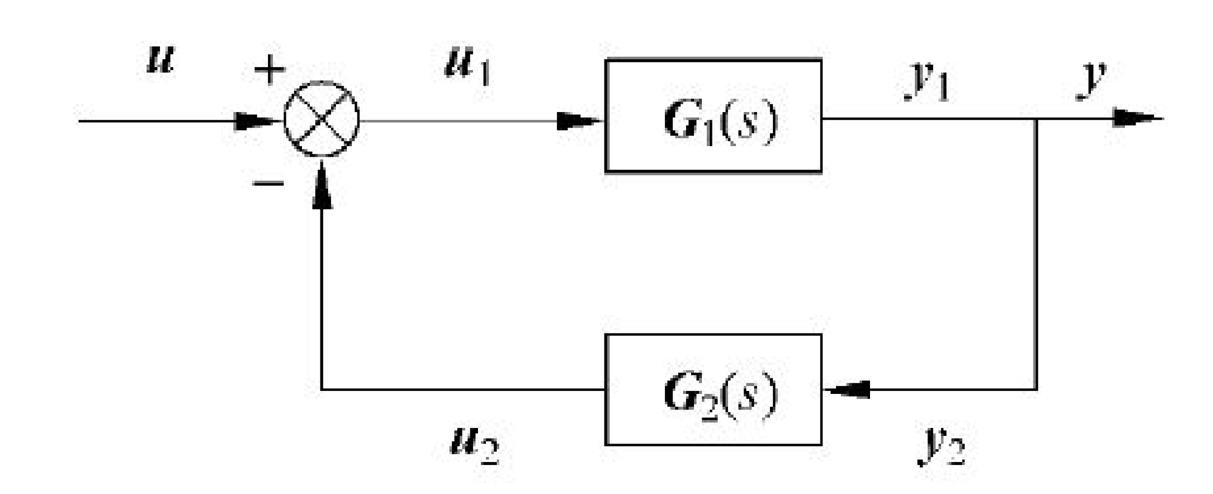


图 1.5.3　子系统的反馈联结

S_1 和 S_2 可以反馈联结的条件是：

$$\dim(\boldsymbol{u}_1)=\dim(\boldsymbol{y}_2),\quad \dim(\boldsymbol{u}_2)=\dim(\boldsymbol{y}_1) \tag{1.5.19}$$

子系统 S_1 和 S_2 进行反馈联结后，组合系统在变量上具有以下特点：

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{y}_2,\quad \boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}_2 \tag{1.5.20}$$

根据这些信号特点，有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1(t)\\&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1[\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{y}_2(t)]\\&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1[\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}_2(t)]\\&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1[\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{y}_1(t)]\\&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\{\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{D}_2[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t)]\}\\&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1[\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t)]\end{aligned} \tag{1.5.21}$$

比较第 1 个和最后 1 个等号的右端，得

$$\boldsymbol{u}_1(t)=\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t) \tag{1.5.22}$$

即

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{u}_1(t)=\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t) \tag{1.5.23}$$

设矩阵

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1 \tag{1.5.24}$$

可逆，得

$$\boldsymbol{u}_1(t)=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}[\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)] \tag{1.5.25}$$

代入到式(1.5.21)，得状态方程

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1(t)\\&=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}[\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)]\\&=[\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1]\boldsymbol{x}_1(t)-\\&\quad\ \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\\&\quad\ \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{1.5.26}$$

对于第 2 个子系统，有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_2(t) &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2(t)\\ &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}_1(t)\\ &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2[\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t)]\\ &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\{\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\times\\ &\quad [\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)]\}\\ &= \boldsymbol{B}_2[\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1]\boldsymbol{x}_1(t)+\\ &\quad [\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{C}_2]\boldsymbol{x}_2(t)+\\ &\quad \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{1.5.27}$$

式(1.5.26)和式(1.5.27)就是反馈联结的状态方程,也可写为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \bar{\boldsymbol{A}}_{12}\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} & \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1\\ \bar{\boldsymbol{B}}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t) \tag{1.5.28}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{A}}_{11} &= \boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{12} &= -\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{C}_2\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} &= \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{22} &= \boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{C}_2\\ \bar{\boldsymbol{B}}_1 &= \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\\ \bar{\boldsymbol{B}}_2 &= \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\end{aligned} \tag{1.5.29}$$

利用式(1.5.20)中的第2式,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{y}_1(t)\\ &= \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1(t)\\ &= \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}[\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)]\\ &= [\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1]\boldsymbol{x}_1(t)-\\ &\quad \boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{u}(t)\\ &= [\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{C}_1 \quad -\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{C}_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+\\ &\quad \boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{1.5.30}$$

这就是反馈联结系统的输出方程。

若两个子系统都没有直接传递项,即 $\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{D}_2$ 都为零,则组合系统状态空间描述简化为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= [\boldsymbol{C}_1 \quad 0]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.5.31}$$

根据式(1.5.20)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(s) &= \boldsymbol{y}_1(s)\\ &= \boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}_1(s)\\ &= \boldsymbol{G}_1(s)[\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{y}_2(s)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\boldsymbol{G}_1(s)[\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{u}_2(s)]\\
&=\boldsymbol{G}_1(s)[\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{y}(s)]\\
&=\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{y}(s)
\end{aligned}\tag{1.5.32}
$$

于是有

$$[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)]\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}(s)\tag{1.5.33}$$

设矩阵

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)\tag{1.5.34}$$

可逆，得反馈联结系统的传递函数矩阵

$$\boldsymbol{G}(s)=[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)]^{-1}\boldsymbol{G}_1(s)\tag{1.5.35}$$

传递函数矩阵(1.5.35)还有另外一种形式。推导如下：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(s)&=\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{y}_2(s)\\
&=\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{u}_2(s)\\
&=\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{y}_1(s)\\
&=\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}_1(s)
\end{aligned}\tag{1.5.36}
$$

由此

$$[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)]\boldsymbol{u}_1(s)=\boldsymbol{u}(s)\tag{1.5.37}$$

设矩阵

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)\tag{1.5.38}$$

可逆，得

$$\boldsymbol{u}_1(s)=[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)]^{-1}\boldsymbol{u}(s)\tag{1.5.39}$$

进而有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(s)&=\boldsymbol{y}_1(s)\\
&=\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{u}_1(s)\\
&=\boldsymbol{G}_1(s)[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)]^{-1}\boldsymbol{u}(s)
\end{aligned}\tag{1.5.40}
$$

于是得组合系统的传递函数矩阵

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{G}_1(s)[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)]^{-1}\tag{1.5.41}$$

为了便于理解反馈联结，这里给出矩阵理论的一个结果：对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，若乘积 $\boldsymbol{AB}$ 为方阵，则 $\boldsymbol{BA}$ 也是方阵，且二者具有相同的非零特征根。证明可由矩阵特征值和特征向量的定义给出。根据这一结果，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_2(s)\boldsymbol{G}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)$、$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2$ 可逆性相同，即同时可逆，或同时不可逆。

1.6　状态向量的可逆变换

在系统的状态空间描述中，一组状态变量构成了状态空间的一个坐标系。状态变量的不同选取方式对应不同的坐标系。同一个系统，在不同坐标系下的表达式也是不同的。回顾前面的状态空间建模可知，同一个传递函数，进行直接分解、串联分解和并联分解后，由于状态变量选取的不同，得到的系统矩阵、输入向量和输出向量一般来说也不同。

这种多样性，实际上可以为基于特定参数矩阵的分析或设计方法提供便利。例如伴侣矩阵的特征值只取决于最后一行，改变这一行就可以实现极点配置；并联形式的状态方程易于得到系统的极点信息；串联形式的状态方程，由于子系统都是 1 阶或 2 阶的低阶系统，

因而为逐步后推(backstepping)的设计思想提供了前提准备。由此,系统状态向量的可逆变换,或说坐标变换,是系统分析和设计中的一种广为应用的技术手段。

状态向量的不可逆变换,会损失关键信息,实际上会改变系统的阶次。因此,这里强调变换的可逆性。

对于线性定常系统

$$\mathrm{S}:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}\tag{1.6.1}$$

引入状态向量的可逆线性变换

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t)\tag{1.6.2}$$

这里 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的常值矩阵。设变换后的系统状态空间表达式为

$$\bar{\mathrm{S}}:\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}\tag{1.6.3}$$

比较 S 和 $\bar{S}$ 可以看出,$\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{y}(t)$没有变化。系统状态向量的变换属于系统内部信号的变化,自然影响不到系统的外部信号 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{y}(t)$。

由式(1.6.2)和式(1.6.3)得

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)&=\boldsymbol{P}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\&=\boldsymbol{P}^{-1}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)]\\&=\boldsymbol{P}^{-1}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)]\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\end{aligned}\tag{1.6.4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\\&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{u}(t)\end{aligned}\tag{1.6.5}$$

比较式(1.6.3)～式(1.6.5)得

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},\quad \bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B},\quad \bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P},\quad \bar{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{D}\tag{1.6.6}$$

这就是状态变换前后系统参数矩阵的对应关系。

从矩阵理论的角度看,式(1.6.6)中系统矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 是相似关系,因而具有完全相同的特征方程和特征值;$\bar{\boldsymbol{B}}$ 和 $\boldsymbol{B}$、$\bar{\boldsymbol{C}}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别具有相同的秩。秩在这里代表线性独立的输入或输出信号的个数。

比较 S 和 $\bar{S}$,直接传递矩阵 $\boldsymbol{D}$ 没有变化。$\boldsymbol{D}$ 作为系统外部信号 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{y}(t)$之间的直接传递系数矩阵,自然不受系统内部状态向量的影响。

根据传递函数矩阵的计算公式(1.3.13),系统 $\bar{S}$ 对应的传递函数矩阵是

$$\bar{\boldsymbol{G}}(s)=\bar{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{E}-\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}+\bar{\boldsymbol{D}}\tag{1.6.7}$$

把式(1.6.6)代入式(1.6.7),进一步计算得

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{G}}(s)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\\&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}[\boldsymbol{P}^{-1}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}]^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\\&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}[\boldsymbol{P}^{-1}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{P}]\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\\&=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\end{aligned}\tag{1.6.8}$$

而这也正是状态空间表达式(1.6.1)的传递函数矩阵。

以上推导表明,系统状态向量的可逆变换不会改变系统的传递函数矩阵。注意到传递

函数矩阵表达的是系统外部的输入输出关系，并不涉及系统内部的状态变量，这个结果是自然而然的。

若两个系统的参数矩阵满足关系式(1.6.6)，则称这两个系统代数等价。

系统矩阵的特征值是系统动力学特性的重要参数。如果系统矩阵是对角型或 Jordan 型矩阵，则其特征值就是对角元素。对于式(1.4.94)那样的实 Jordan 型矩阵，特征值也能由对角块轻易获取。具有这样系统矩阵的状态空间描述称为对角标准型或 Jordan 标准型。标准型也称为规范型。

对于一个状态空间描述(见式(1.6.1))，利用状态的可逆变换(见式(1.6.2)和式(1.6.6))，一定可以将其转化为对角标准型或 Jordan 标准型。转化的过程和系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征值结构(即重根情况)有关。分为以下几种情况：

(1) 特征值两两互异；如

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}5&&\\&6&\\&&7\end{bmatrix},\quad 或\quad \bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}5&&\\&1+\mathrm{j}2&\\&&1-\mathrm{j}2\end{bmatrix}\tag{1.6.9}$$

(2) 有重根，但每个重根的重数等于其对应的线性无关的特征向量个数，如

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}5&&\\&6&\\&&6\end{bmatrix}\tag{1.6.10}$$

其中特征值 6 对应两个线性无关的特征向量。

(3) 有重根，但每个重根只对应一个阶数大于或等于 2 的 Jordan 块；如

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}3&&&&&\\&2&1&&&\\&&2&&&\\&&&4&1&0\\&&&&4&1\\&&&&&4\end{bmatrix}\tag{1.6.11}$$

(4) 有重根，但重根在对应一个阶数大于等于 2 的 Jordan 块的同时，还对应其他阶数大于等于 2 的 Jordan 块，或以这个根为对角元的对角子块。如

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}3&&&&&\\&4&1&&&\\&&4&&&\\&&&4&1&0\\&&&&4&1\\&&&&&4\end{bmatrix},\quad 或\quad \bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}2&&&&&\\&4&&&&\\&&4&&&\\&&&4&1&0\\&&&&4&1\\&&&&&4\end{bmatrix}\tag{1.6.12}$$

获取以上各种情况下对角型或 Jordan 型的 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 以及式(1.6.2)中相应的变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，有两种方法。一是根据 λ-矩阵理论获得对角型或 Jordan 型的 $\bar{\boldsymbol{A}}$，再由

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\tag{1.6.13}$$

的等价形式

$$\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\tag{1.6.14}$$

解得变换矩阵 $\boldsymbol{P}$；二是由系统矩阵变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 求得其特征值和特征值结构，再由特征向量和广义特征向量理论构造出变换矩阵 $\boldsymbol{P}$。其中，第(4)种情形下 $\boldsymbol{P}$ 的构造，理论和方法都较为复杂。

有了变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，就可以根据式(1.6.6)求得变换后的输入矩阵和输出矩阵。

设系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶伴侣矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix} \tag{1.6.15}$$

特征值 λ_1、λ_2、λ_3 两两互异。则变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的一种构造方法是：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix} \tag{1.6.16}$$

即变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 得每一列恰为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相应特征值的特征向量。以第 1 列为例，验证如下：

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$a_3+a_2s+a_1s^2+s^3=0 \tag{1.6.17}$$

而特征值 λ_1 必然满足特征方程，即

$$a_3+a_2s+a_1s^2+s^3=0 \tag{1.6.18}$$

于是

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \lambda_1\\ \lambda_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1^2\\ -a_3-a_2\lambda_1-a_1\lambda_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1^2\\ \lambda_1^3\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\ \lambda_1\\ \lambda_1^2\end{bmatrix} \tag{1.6.19}$$

即

$$\begin{bmatrix}1\\ \lambda_1\\ \lambda_1^2\end{bmatrix} \tag{1.6.20}$$

是 λ_1 的特征向量。

容易验证：

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix} \tag{1.6.21}$$

而上式等价于

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix} \tag{1.6.22}$$

这个结果对于特征值两两互异的高阶伴侣矩阵具有普遍成立。

若伴侣矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的唯一特征值 λ 对应一个 Jordan 块，对于 2 阶和 3 阶的情形，分别有

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \tag{1.6.23}$$

和

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda & 1 & 0\\ \lambda^2 & 2\lambda & 1\end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{A} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda & 1 & 0\\ \lambda^2 & 2\lambda & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} \tag{1.6.24}$$

即这种情况下,变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 也能由特征值直接构造。

$\bar{\boldsymbol{A}}$ 以及变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的一般构造过程可参见线性代数或矩阵理论。应当指出,上面特征值的 4 种结构中,特征值都有可能是复数,因而相应的变换矩阵中也会出现复数。这样的系统描述仅具有数学意义,无法物理实现。为了避免这种情况,就要引入式(1.4.94)那样的实 Jordan 标准型,对应的变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 也是实矩阵,可由复特征值时的 $\boldsymbol{P}$ 来构造。

这里给出关于矩阵特征值的一些概念,后面章节会用到。

观察式(1.6.12)中两个矩阵,发现特征值 4 的重数都是 5,即对应$(s-4)^5$。这种由矩阵特征方程因式分解确定的特征值重数称为代数重数。

同时,我们也能明显看到,式(1.6.12)中第一个矩阵中特征值 4 分别对应 2 阶、3 阶两个 Jordan 块,而第二个矩阵中,特征值 4 对应一个 3 阶 Jordan 块和一个 2 阶对角子块(即(2,2)元和(3,3)元)。

同为 5 重特征值,结构却明显不同。这表明,特征值的代数重数无法表示重根的全部特征。

这里引入特征值几何重数的概念。如果把矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix}2 & & & & & \\ & 4 & & & & \\ & & 4 & & & \\ & & & 4 & 1 & 0\\ & & & & 4 & 1\\ & & & & & 4\end{bmatrix} \tag{1.6.25}$$

中的(2,2)元和(3,3)元分别看作是两个 1 阶的 Jordan 块,那么特征值 4 的几何重数就是 3,也就是对应的 Jordan 块的总数。这里特征值 2 的代数重数和几何重数都是 1。

按照这个思路,矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix}3 & & & & & \\ & 4 & 1 & & & \\ & & 4 & & & \\ & & & 4 & 1 & 0\\ & & & & 4 & 1\\ & & & & & 4\end{bmatrix} \tag{1.6.26}$$

中,特征值 4 的几何重数就是 2,因为总共对应两个 Jordan 块。

设 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值。λ 的几何重数 α 定义如下:

$$\operatorname{rank}(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = n - \alpha \tag{1.6.27}$$

或

$$\alpha = n - \operatorname{rank}(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \tag{1.6.28}$$

根据线性方程组理论,几何重数 α 恰为线性方程组

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{h} = 0 \tag{1.6.29}$$

的解空间(基础解系)的维数,也就是矩阵$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$零空间的维数。这样,几何重数为$\alpha$的特征值,必对应$\alpha$个线性无关的特征向量。

由以上讨论可知,对任一特征值,其几何重数小于或等于代数重数。

关于特征值重数的一个例子,是n阶矩阵$\boldsymbol{E}_n$,几何重数和代数重数都是n。

应当指出,矩阵的重根结构包括 Jordan 块结构是极其脆弱的。矩阵元素的细微变化,就可能使其不再相似于重根结构或 Jordan 块结构。

那么,重根结构或 Jordan 块结构在自动控制中有什么应用呢?请看下面的系统描述:

$$\dot{x}_1(t) = 0, \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t), \quad \dot{x}_3(t) = x_2(t) \tag{1.6.30}$$

若取初始条件

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0 \tag{1.6.31}$$

则$x_1(t)$、$x_2(t)$和$x_3(t)$分别就是单位阶跃、单位斜坡和单位抛物线函数3种典型信号;而状态方程(1.6.30)的系统矩阵,就是3阶下三角的 Jordan 块

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.6.32}$$

在状态空间法中,类似的 Jordan 块会直接用于系统分析或设计。

若要在已知两个系统代数等价的前提下求解可逆变换矩阵$\boldsymbol{P}$,可按照依据式(1.6.6)的变形

$$\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}, \quad \bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P} \tag{1.6.33}$$

来计算。式(1.6.33)是关于$\boldsymbol{P}$的元素的线性方程组。若两个系统代数等价,则这个方程组一定有解,而且一定有可逆的解$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0$;但一般情况下解不必唯一,即可能有多组可逆的解。

对于线性时变系统,可以考虑状态向量的时变可逆变换$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{P}^{-1}(t)\boldsymbol{x}(t)$;对于非线性系统,可以考虑状态向量的非线性可逆变换$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=T[\boldsymbol{x}(t)]$。

系统状态向量的可逆变换着眼于改变系统描述的细节,构造的变换往往依赖于系统的物理参数,有一个变换的可靠性问题。尤其是当系统参数变化相对显著时,必须要保证这种变化引起的效应可以合理评估。

在1.3节中提到,线性系统的状态变量可以取为输入、输出及其各阶导数的线性组合,非线性系统的状态变量可以取为输入、输出及其各阶导数的代数函数。借助状态向量可逆变换的概念,可得以下结论,作为本章的结尾:线性系统的状态变量一定是输入、输出及其各阶导数的线性组合,非线性系统的状态变量一定是输入、输出及其各阶导数的代数函数,不论其物理含义是否明确。

本章小结

本章内容为控制系统的状态空间模型、各种模型的转换和作为系统分析与设计工具的状态向量可逆变换。

本章的第一要务是控制系统状态变量的概念和物理意义,其本质为系统输入、输出及各阶变化率的代数函数(如线性组合),一个状态变量对应一个积分环节或惯性环节,构成系统

的一个阶次。注意对照、总结模型转换中的各种状态变量选取方式，体会状态变量的实质。

本章在模型转换方面较之于以往教材补充了大量细节内容，如传递函数极点既有重根又有共轭复根及其交叉情形的状态空间建模方法、机理建模的通用步骤等。

习题 1

1.1　分别建立如图 P1.1 和图 P1.2 所示电路的状态空间描述。状态变量、输入和输出分别制定如下：

图 P1.1：$x_1=u_C, x_2=i_L, u=e, y=i_L$

图 P1.2：$x_1=u_{C_1}, x_2=u_{C_2}, u=e, y=u_{C_1}$

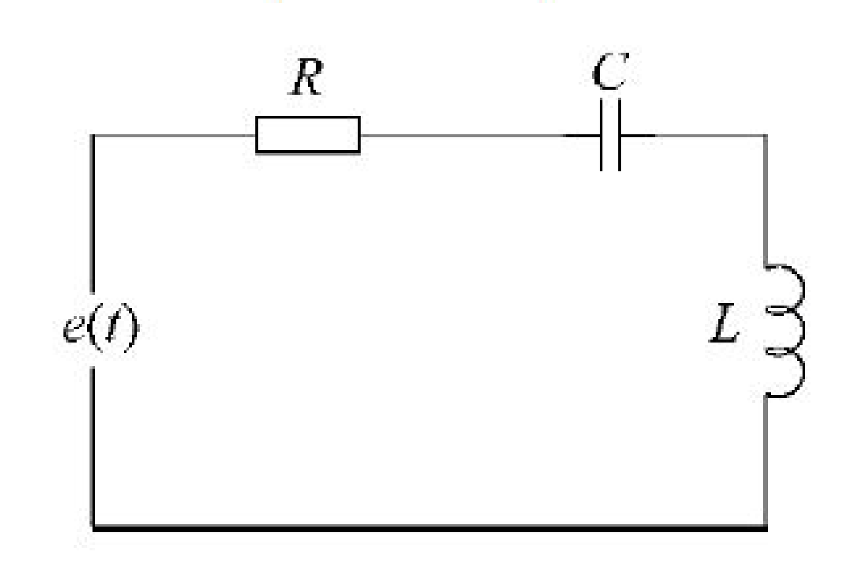


图 P1.1　RLC 电路

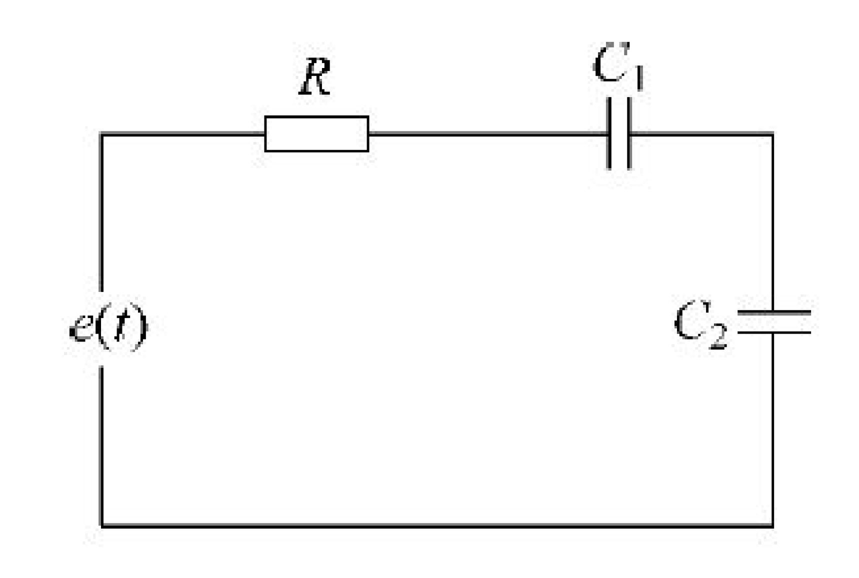


图 P1.2　RC 电路

1.2　定义状态变量，分别给出下列输入-输出描述的一个状态空间描述

(1) $\dddot{y}+3\ddot{y}-2\dot{y}+3y=2u$

(2) $\dddot{y}+2\ddot{y}-3\dot{y}-2y=\dot{u}-2u$

(3) $\dddot{y}-4\ddot{y}-\dot{y}-3y=2\ddot{u}+\dot{u}-u$

1.3　分别定义状态变量，给出下列传递函数的一个状态空间描述

(1) $g_1(s)=\dfrac{2s^2+16s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$

(2) $g_2(s)=\dfrac{2s^3-s^2+16s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$

(3) $g_3(s)=\dfrac{s^2+s+3}{(s+2)^2(s+1)}$

1.4　把下列状态方程通过状态向量的可逆变换化为对角标准型或 Jordan 标准型

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}8 & -8 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -9 & 6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

1.5　计算以下状态空间描述的传递函数

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix}-5 & 1\\ 9 & 6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

1.6　系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

设系统输出为 $y=x_1+2x_2$，求输入-输出高阶微分方程。

1.7　计算下列状态空间描述的传递函数矩阵：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

1.8　对于伴侣矩阵

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}$$

及其转置 $A_2=A_1^{\mathrm{T}}$，求变换矩阵 P，使 $A_2=P^{-1}A_1P$。

1.9　在图 P1.3 所示的反馈联结中，

$$G_1(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2}\\ 0 & \dfrac{s+1}{s+2}\end{bmatrix},\quad G_2(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-3} & \dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

求组合系统的传递函数矩阵 $G(s)$。

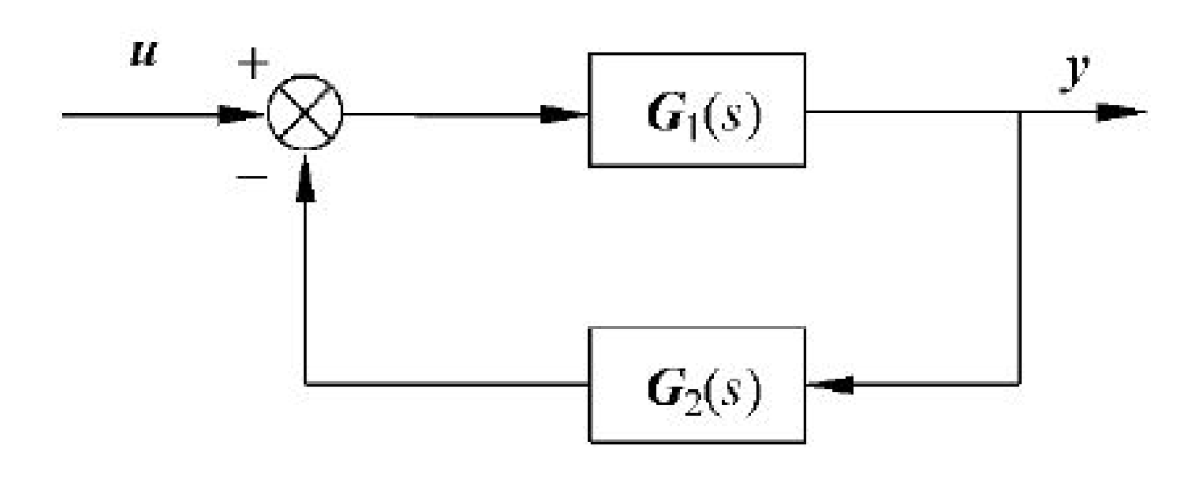


图 P1.3　反馈联结

1.10　在图 P1.3 所示的反馈联结中，若

$$G_1(s)=\frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)},\quad G_2(s)=\frac{s+2}{s+3}$$

计算组合系统的一种状态空间描述。

1.11　证明：对于矩阵 A 和 B，若乘积 AB 为方阵，则 AB 和 BA 具有相同的非零特征值。

第 2 章

线性控制系统的状态响应

控制系统的状态空间描述为系统分析提供了可能性。系统分析的目的，是揭示系统状态的运动规律和基本特性。系统分析通常分为定量分析和定性分析。定量分析是对系统运动规律的精确量化的研究，确定系统由外部激励和初始条件引起的响应；定性分析要研究的是能或不能、行或不行的问题，如决定系统状态敛散性的稳定性、作为系统设计的前提条件的能控性和能观测性等，需要是或否的定性判断。同时，也应注意，定量分析和定性分析不是截然对立的。比如，定性的判断必然依赖于量化表达。

本章以连续线性控制系统为研究对象，给出其状态响应的一般表达形式。有了状态响应，根据输出方程就得到系统的输出响应。离散线性系统状态响应的结论与连续系统是平行的，本章给出扼要介绍。非线性系统的状态响应，除个别情况外，一般说来没有解析表达，可借助于数值计算来近似求解。

2.1 状态响应概述

线性定常系统和线性时变控制系统的状态方程分别为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,t_\alpha] \tag{2.1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,t_\alpha] \tag{2.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$为系统状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$输入向量，t_0 为初始时刻，$\boldsymbol{x}(t_0)$为初始状态。

由于系统是不断运动变化的，因此，从数学角度或某些应用角度看，初始时刻 t_0 的取值不是绝对的，可以是研究者所关注的任意时刻。根据常微分方程组的知识，t_0 的不同取值并不影响方程组的解。

求解状态响应，就是从系统状态方程出发，给出系统状态明确、精确的量化表达，为估计、推演系统的实际运动过程提供理论依据。从数学角度看，就是通过求解微分方程组得到状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$的解析表达式。状态响应就是状态方程式(2.1.1)或式(2.1.2)的解。

从信号的角度讲，状态响应 $\boldsymbol{x}(t)$必然和初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 以及系统输入 $\boldsymbol{u}(t)$有关；从系统结构和参数的角度讲，状态响应 $\boldsymbol{x}(t)$也必然依赖于$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$或$[\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t)]$。因此，引入适当的输入 $\boldsymbol{u}(t)$，可以直接影响 $\boldsymbol{x}(t)$，也可以通过改变$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$或$[\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t)]$间接影响 $\boldsymbol{x}(t)$，从而达到系统调节的目的。

状态方程式(2.1.1)或式(2.1.2)都是等式约束条件。若满足约束条件的 $\boldsymbol{x}(t)$不存在，显然系统分析就成了空谈；若满足约束条件的 $\boldsymbol{x}(t)$不唯一，就意味着我们要研究不止一个系统的运动，这也并非研究者的本意。因此，状态方程式(2.1.1)或式(2.1.2)的状态响应 $\boldsymbol{x}(t)$存在且唯一，是系统分析乃至系统设计的前提。

保证状态方程式(2.1.2)的解存在且唯一的条件有多种，比如 $\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$的元素为时间区间$[t_0,t_\alpha]$的连续函数，或分段连续函数。这对于实际物理系统而言很容易满足。但从数

学角度讲,上述条件还可以弱化为:

① 系统矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$的各个元素 $a_{ij}(t)$在$[t_0,t_\alpha]$上绝对可积,即

$$\int_{t_0}^{t_\alpha} |a_{ij}(t)| \mathrm{d}t < +\infty \tag{2.1.3}$$

② 输入矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$的各个元素 $b_{ik}(t)$在$[t_0,t_\alpha]$上平方可积,即

$$\int_{t_0}^{t_\alpha} b_{ik}^2(t) \mathrm{d}t < +\infty \tag{2.1.4}$$

③ 输入 $\boldsymbol{u}(t)$的各个元素 $u_k(t)$在$[t_0,t_\alpha]$上平方可积,即

$$\int_{t_0}^{t_\alpha} u_k^2(t) \mathrm{d}t < +\infty \tag{2.1.5}$$

根据不等式

$$\left[\int_{t_0}^{t_\alpha} |b_{ik}(t)u_k(t)| \mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \int_{t_0}^{t_\alpha} b_{ik}^2(t)\mathrm{d}t \times \int_{t_0}^{t_\alpha} u_k^2(t)\mathrm{d}t$$

条件②和③能够保证 $b_{ik}(t)u_k(t)$,即乘积 $\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$的各个元素在$[t_0,t_\alpha]$上绝对可积。

以上讨论是针对时变系统进行的。对于定常系统(2.1.1),条件②和③自然成立。

如前所述,系统的初始状态和外部输入都引起状态响应。系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \in [t_0,t_\alpha] \tag{2.1.6}$$

对应输入 $\boldsymbol{u}(t)\equiv 0$,相当于自治系统。其状态响应仅由初态 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 引起,因此称为自由响应(运动),也称零输入响应(运动);若系统初态为零,即

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = 0, \quad t \in [t_0,t_\alpha] \tag{2.1.7}$$

则其状态响应仅由外部输入引起,因此称为强迫响应(运动)。

上述概念同样适用于定常系统(2.1.1)。

2.2　定常自治系统的状态响应

本节讨论线性定常自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \geqslant t_0 \tag{2.2.1}$$

的状态响应表达式。

如果状态变量 $\boldsymbol{x}(t)$是一维的,即 $\boldsymbol{x}(t)$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{x}_0$ 都是标量,那么由高等数学知识可知

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 \tag{2.2.2}$$

其中 e=2.71828…为自然对数的底。$\boldsymbol{A}$ 为标量时,$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$有级数表达

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} &= 1 + \boldsymbol{A}(t-t_0) + \frac{\boldsymbol{A}^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3(t-t_0)^3}{3!} + \cdots \\ &= \frac{\boldsymbol{A}^0(t-t_0)^0}{0!} + \frac{\boldsymbol{A}^1(t-t_0)^1}{1!} + \frac{\boldsymbol{A}^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3(t-t_0)^3}{3!} + \cdots\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

且级数是一致收敛和绝对收敛的,因此状态方程的解可表示为

$$x(t) = \left[\frac{\boldsymbol{A}^0(t-t_0)^0}{0!} + \frac{\boldsymbol{A}^1(t-t_0)^1}{1!} + \frac{\boldsymbol{A}^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3(t-t_0)^3}{3!} + \cdots\right]\boldsymbol{x}_0 \tag{2.2.4}$$

注意到 0^0 没有意义,而式(2.2.4)中 $\boldsymbol{A}$ 和$(t-t_0)$都可能为零。实际上,$v=0$ 是函数 v^0 的可去不连续点。这里定义 $0^0=1$。与此类似,当 $\boldsymbol{A}=0$ 是 n 阶方阵时,定义 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}_n$。

参考状态变量 $\boldsymbol{x}(t)$是一维的情形,当状态 $\boldsymbol{x}(t)$是多维向量时,即 $\boldsymbol{A}$ 是方阵时,我们设想式(2.2.4)是否仍为式(2.2.1)的解。为了验证这个设想,把式(2.2.4)代入式(2.2.1)的左

端，计算得

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \left[\frac{\boldsymbol{A}^0\ (t-t_0)^0}{0!}+\frac{\boldsymbol{A}^1\ (t-t_0)^1}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^2\ (t-t_0)^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^3\ (t-t_0)^3}{3!}+\cdots\right]\boldsymbol{x}_0\\
&= \left[0+\frac{\boldsymbol{A}^1}{0!}+\frac{\boldsymbol{A}^2\ (t-t_0)^1}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^3\ (t-t_0)^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^4\ (t-t_0)^3}{3!}+\cdots\right]\boldsymbol{x}_0\\
&= \left[\frac{\boldsymbol{A}^1\ (t-t_0)^0}{0!}+\frac{\boldsymbol{A}^2\ (t-t_0)^1}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^3\ (t-t_0)^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^4\ (t-t_0)^3}{3!}+\cdots\right]\boldsymbol{x}_0\\
&= \boldsymbol{A}\left[\frac{\boldsymbol{A}^0\ (t-t_0)^0}{0!}+\frac{\boldsymbol{A}^1\ (t-t_0)^1}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^2\ (t-t_0)^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^3\ (t-t_0)^3}{3!}+\cdots\right]\boldsymbol{x}_0\\
&= \boldsymbol{A}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

即式(2.2.4)的确适合状态方程(2.2.1)。由矩阵理论可知，矩阵级数

$$\frac{\boldsymbol{A}^0\ (t-t_0)^0}{0!}+\frac{\boldsymbol{A}^1\ (t-t_0)^1}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^2\ (t-t_0)^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^3\ (t-t_0)^3}{3!}+\cdots$$

是一致收敛和绝对收敛的。由于状态方程满足解的存在性和唯一性条件，所以式(2.2.4)就是式(2.2.1)的唯一解，或说状态响应。

把级数式(2.2.4)记为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}(t-t_0)+\frac{\boldsymbol{A}^2\ (t-t_0)^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^3\ (t-t_0)^3}{3!}+\cdots \tag{2.2.6}$$

称为矩阵指数。由此，状态方程(2.2.1)的状态响应可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) \tag{2.2.7}$$

一般的理论分析中，总可取初始时刻 $t_0=0$，状态响应简化为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \tag{2.2.8}$$

其中

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^3t^3}{3!}+\cdots \tag{2.2.9}$$

根据定义式(2.2.6)和式(2.2.9)，可得矩阵指数的如下几个性质：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}$

这个性质在涉及矩阵指数积分的场合可用于构造原函数，如 $-\boldsymbol{A}^{-1}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$ 就是 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$ 的原函数。

(2) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1+t_2)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_2}$

(3) $\boldsymbol{A}=0\Rightarrow\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{E}$

(4) $(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^{-1}=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$

(5) $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{PAP}^{-1})t}=\boldsymbol{P}^{-1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{P}$

(6) $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\Leftrightarrow\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_2t}$

(7) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\Rightarrow\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1t} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_nt}\end{bmatrix}$

(8) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_n\end{bmatrix}\Rightarrow\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_nt}\end{bmatrix}$

(9) $t_2-t_1=t_4-t_3 \Rightarrow \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_2-t_1)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_4-t_3)}$,即矩阵指数只取决于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及起止时刻的差。

(10) $[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}]^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t-t_0)}$

2.3 矩阵指数的计算

状态响应的计算需要矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的计算,有以下 4 种方法。

方法一 利用矩阵指数的级数定义直接计算。

包括 3 个方面:第一,通过编程利用计算机得到 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的满足精度要求的数值结果;第二,对于某些特殊形式的矩阵,得到 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的解析解;第三,用于理论推导,用简单的矩阵指数表示相对复杂的矩阵指数,如性质(1)~(9)。

对于第一个方面,通过设置截断误差,就能得到满足精度的近似解。现对后两个方面举例说明。

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是以 0 为特征值的 3 阶 Jordan 块时,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^5=\cdots=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{2.3.2}$$

定义式(2.2.9)中的级数实际上变为有限项的和为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&t&0\\0&0&t\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&t^2/2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&t&t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

这个思路对于以 0 为特征值的 2 阶或高阶 Jordan 块具有一般性,如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix} \tag{2.3.4}$$

再考虑矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} \tag{2.3.5}$$

的矩阵指数计算。对于整数 $k\geqslant 0$,有

$$\boldsymbol{A}^{4k}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{4k+1}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{4k+2}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{4k+3}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix} \tag{2.3.6}$$

代入到式(2.2.9),进而根据正弦和余弦函数的级数表示为

$$\sin(t)=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}-\cdots \tag{2.3.7}$$

可得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix} \tag{2.3.8}$$

针对第三个方面，考虑一种分块结构的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E}\\ 0 & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix} \tag{2.3.9}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 代表与 $\boldsymbol{A}_1$ 同维的单位矩阵。容易验证，对于整数 $k\geqslant1$，有

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^k & k\boldsymbol{A}_1^{k-1}\\ 0 & \boldsymbol{A}_1^k\end{bmatrix} \tag{2.3.10}$$

利用定义式(2.2.9)，进一步计算可得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t} & t\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t}\\ 0 & \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t}\end{bmatrix} \tag{2.3.11}$$

类似可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E} & \\ & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E}\\ & & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}\Rightarrow\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t} & t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t} & t^2\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t}/2!\\ & \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t} & t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t}\\ & & \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1t}\end{bmatrix} \tag{2.3.12}$$

作为式(2.3.12)的推论，取 $\boldsymbol{A}_1=\lambda$ 为标量，则得 3 阶 Jordan 的矩阵指数，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{bmatrix}\Rightarrow\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1t} & t\mathrm{e}^{\lambda_1t} & t^2\mathrm{e}^{\lambda_1t}/2!\\ & \mathrm{e}^{\lambda_1t} & t\mathrm{e}^{\lambda_1t}\\ & & \mathrm{e}^{\lambda_1t}\end{bmatrix} \tag{2.3.13}$$

方法二　借助对角标准型或 Jordan 标准型计算矩阵指数。

若能得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角标准型或 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$ 以及相应的变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}\quad\text{或}\quad\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \tag{2.3.14}$$

则根据矩阵指数的性质(5)、(7)、(8)就得到 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1}$。该方法的核心是计算变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，可能涉及重根代数重数、几何重数的讨论。

方法三　把矩阵指数表示为矩阵的有限项多项式。

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}f(s)&=\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\\ &=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

根据线性代数的 Cayley-Hamilton(凯莱-哈密顿)定理可知，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{A}^0\\ =&\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}\\ =&0\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

于是有

$$\boldsymbol{A}^n=-a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}-\cdots-a_1\boldsymbol{A}-a_0\boldsymbol{E} \tag{2.3.17}$$

进而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{n+1} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{n}\\ &= -a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n}-a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-1}-\cdots-a_{1}\boldsymbol{A}^{2}-a_{0}\boldsymbol{A}\\ &= -a_{n-1}(-a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}-\cdots-a_{1}\boldsymbol{A}-a_{0}\boldsymbol{E})-\\ &\quad a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-1}-\cdots-a_{1}\boldsymbol{A}^{2}-a_{0}\boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

以此类推,对于整数 $k\geqslant n$,$\boldsymbol{A}^k$ 总可以表示为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{A}^{n-2},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}$ 的线性组合。再结合矩阵指数的定义式(2.2.9),$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 总可以表示为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{A}^{n-2},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}$ 的线性组合:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} \tag{2.3.19}$$

问题转化为确定组合的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$。

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以通过相似变换化为对角标准型,即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{2.3.20}$$

且特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 两两互异,则在式(2.3.19)两端同时左乘 $\boldsymbol{P}^{-1}$、右乘 $\boldsymbol{P}$,可得

$$\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix}=a_0\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}+a_1\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}+\cdots+a_{n-1}\begin{bmatrix}\lambda_1^{n-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix} \tag{2.3.21}$$

于是得到

$$\begin{gathered}a_0+a_1\lambda_1+\cdots+a_{n-1}\lambda_1^{n-1}=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ a_0+a_1\lambda_n+\cdots+a_{n-1}\lambda_n^{n-1}=\mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{gathered} \tag{2.3.22}$$

这个方程组有解的等价条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\left\{\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ \mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\right\} \tag{2.3.23}$$

注意到右端包含时间变元 t,上式对任意 t 成立的等价条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}=n \tag{2.3.24}$$

由于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 两两互异,方程组式(2.3.22)的系数矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix} \tag{2.3.25}$$

可逆,条件式(2.3.23)成立,因此可求得唯一解 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$。代入式(2.3.19)就得到 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

再考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有重根的情况。设 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的重根,重数为 k。在方程组式(2.3.22)中,每个单根对应一个方程。如果依然按照式(2.3.22)的形式构成方程组,由于 λ_2 重复

k 次，系数矩阵式(2.3.25)中就会出现相同的行，因而不再可逆。

形式上看，单纯按照式(2.3.22)构成方程组，会由于 λ_2 重复 k 次而缺少 $k-1$ 个独立的方程。为了补齐 $k-1$ 个独立的方程，可以做以下处理。

在已有方程

$$a_0 + a_1\lambda_2 + \cdots + a_{n-1}\lambda_2^{n-1} = e^{\lambda_2 t} \tag{2.3.26}$$

的两端对 λ_2 求导数，得

$$a_1 + 2a_2\lambda_2 + 3a_3\lambda_2^2 \cdots + (n-1)a_{n-1}\lambda_2^{n-2} = t\,e^{\lambda_2 t} \tag{2.3.27}$$

把特征值 λ_2 的数值代入式(2.3.27)，即为 λ_2 赋值，就得到一个新的方程。

按照这个思路，继续在式(2.3.27)的两端对 λ_2 求导数、为 λ_2 赋值，得到又一个新的方程。求导、赋值 $k-1$ 次，就得到需要的 $k-1$ 个方程。

如有其他重根，也按照这个思路处理。这样最终得到 n 个方程。可以证明，这样得到的方程组其系数矩阵可逆，于是有唯一解。

有 5 点需要指出：

第一，求导是对重根进行的，不是对时间 t；

第二，对特征值求导实际上物理意义并不明确，这里只是借用求导的数学形式；

第三，组合系数为时间 t 的函数；

第四，按照上述方法求得的组合系数 $a_0(t), a_1(t), \cdots, a_{n-1}(t)$ 线性无关，即

$$a_0(t)\beta_0 + a_1(t)\beta_1 + \cdots + a_{n-1}(t)\beta_{n-1} = 0 \tag{2.3.28}$$

对任意时间 t 成立，当且仅当

$$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{n-1} = 0 \tag{2.3.29}$$

就特征值两两互异的情况而言，函数 $e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ 线性无关，而系数 $a_0(t), a_1(t), \cdots, a_{n-1}(t)$ 与 $e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ 之间存在一个由式(2.3.22)和式(2.3.25)确定的可逆变换，因而也是线性无关的。对于重根的情况，有类似的结论。

第五，这里对重根的处理只考虑简单的代数重数就够了，可以不考虑几何重数。当然，如果利用几何重数的信息，计算可能会简化。

例如，考虑 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_3$ 时矩阵指数的计算。矩阵特征值是 $\lambda=1$，代数重数是 3。设

$$e^{\boldsymbol{A}t} = a_0(t)\boldsymbol{E} + a_1(t)\boldsymbol{A} + a_2(t)\boldsymbol{A}^2 \tag{2.3.30}$$

则组合系数满足方程

$$a_0(t) + a_1(t)\lambda + a_2(t)\lambda^2 = e^{\lambda t} \tag{2.3.31}$$

把 $\lambda=1$ 代入，得

$$a_0(t) + a_1(t) + a_2(t) = e^t \tag{2.3.32}$$

式(2.3.31)两端对 λ 求导，得

$$a_1(t) + 2a_2(t)\lambda = te^{\lambda t} \tag{2.3.33}$$

把 $\lambda=1$ 代入，得

$$a_1(t) + 2a_2(t) = te^t \tag{2.3.34}$$

式(2.3.33)两端对 λ 求导，得

$$2a_2(t) = t^2 e^{\lambda t} \tag{2.3.35}$$

把 $\lambda=1$ 代入，得

$$a_2(t) = 0.5t^2 e^t \tag{2.3.36}$$

把式(2.3.36)代入式(2.3.34),得

$$a_1(t) = te^t - t^2e^t \tag{2.3.37}$$

结合式(2.3.32),得

$$a_0(t) = e^t - te^t + 0.5t^2e^t \tag{2.3.38}$$

把求得的系数 $a_0(t)$、$a_1(t)$、$a_2(t)$代入式(2.3.30)得矩阵指数

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= a_0(t)\boldsymbol{E} + a_1(t)\boldsymbol{A} + a_2(t)\boldsymbol{A}^2 \\ &= [a_0(t) + a_1(t)\boldsymbol{A} + a_2(t)]\boldsymbol{E} \\ &= e^t\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

上述过程实际上就是求解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ & 1 & 2\lambda \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ te^{\lambda t} \\ t^2e^{\lambda t} \end{bmatrix} \tag{2.3.40}$$

因为模态 $e^{\lambda t}$、$te^{\lambda t}$、$t^2e^{\lambda t}$线性无关,且系数矩阵可逆,所以这样求得的系数 $a_0(t)$、$a_1(t)$、$a_2(t)$也是线性无关的。

另一方面,根据矩阵指数的定义,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_3$ 时显然有

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= e^t\boldsymbol{E} \\ &= e^t\boldsymbol{E} + 0\boldsymbol{E} + 0\boldsymbol{E}^2 \\ &= e^t\boldsymbol{E} + 0\boldsymbol{A} + 0\boldsymbol{A}^2 \end{aligned} \tag{2.3.41}$$

于是得到不同于式(2.3.36)~式(2.3.38)的另外一组系数 e^t,0,0,这组系数由于包括0,显然是线性相关的。

这个例子表明:(1)矩阵指数表达式(2.3.19)中的系数 $a_0(t),a_1(t),\cdots,a_{n-1}(t)$未必唯一;(2)系数 $a_0(t),a_1(t),\cdots,a_{n-1}(t)$未必线性无关;(3)系数 $a_0(t),a_1(t),\cdots,a_{n-1}(t)$总可以取为线性无关的。

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,有最小多项式的概念。考虑形如

$$g(s) = s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \cdots + a_1s + a_0, \quad k \leqslant n \tag{2.3.42}$$

且满足

$$g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^k + a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.3.43}$$

的多项式集合。其中具有最低次数的,称为 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式。

根据 Cayley-Hamilton 定理,特征多项式属于该集合,因而集合不空;当最小多项式的次数 k_0 严格小于 n 时,根据方法三的基本原理,这时表示矩阵指数只需要 k_0 个系数,计算可以得到简化,而且系数一定是线性无关的。

根据线性代数的相关知识,若最小多项式的次数 k_0 严格小于 n,则意味着一个特征值对应多个 Jordan 块(包括退化的1阶 Jordan 块),即特征值几何重数严格大于1。

方法四 利用 Laplace 反变换计算矩阵指数。

对于状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{2.3.44}$$

进行 Laplace 变换得

$$s\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s) \tag{2.3.45}$$

所以

$$\boldsymbol{x}(s)=(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) \tag{2.3.46}$$

再进行 Laplace 反变换，得

$$\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0) \tag{2.3.47}$$

和状态响应式(2.2.8)相对照，由于二者对于任意的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 都成立，所以必有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}[(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}] \tag{2.3.48}$$

这样，借助于预解矩阵 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 和 Laplace 变换，就可以得到矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。该方法的核心是预解矩阵各个元素的有理分式分解，以及以此为基础的 Laplace 变换，无须细致考虑特征值的重数问题。

下面通过一个例子，演示以上 4 种方法。设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \tag{2.3.49}$$

按照方法一，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^3t^3}{3!}+\cdots\\&=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & t\\ -2t & -3t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-t^2 & -1.5t^2\\ 3t^2 & 3.5t^2\end{bmatrix}+\cdots\\&=\begin{bmatrix}1-t^2+\cdots & t-1.5t^2+\cdots\\ -2t+3t^2+\cdots & 1-3t+3.5t^2+\cdots\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.3.50}$$

按照方法二，首先根据

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=s^2+3s+2 \tag{2.3.51}$$

求得特征值 $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2=-2$；其次，求出使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实现对角化的变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及其逆矩阵：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \tag{2.3.52}$$

最后求得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & \\ & \mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix} \tag{2.3.53}$$

按照方法三，首先根据式(2.3.51)求得特征值 $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2=-2$；其次，求出组合系数

$$\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1\\ 1 & \lambda_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix} \tag{2.3.54}$$

最后求得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix} \tag{2.3.55}$$

按照方法三，预解矩阵为

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}&=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$
=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+2}-\frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1}\end{bmatrix} \tag{2.3.56}
$$

求 Laplace 反变换,即得

$$
e^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+e^{-2t}\end{bmatrix} \tag{2.3.57}
$$

重新考虑本节中的式(2.3.9)。设其中矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 按照式(2.3.5)取值,于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值$\pm$j 全部位于虚轴上。系统初态取为 $\boldsymbol{x}(0)=[a\ b\ c\ d]^{\mathrm{T}}$。根据式(2.2.8),系统的状态响应为

$$
x(t)=\begin{bmatrix}a\cos t+b\sin t+ct\cos t+dt\sin t \\ -a\sin t+b\cos t-ct\sin t+dt\cos t \\ c\cos t+d\sin t \\ -c\sin t+d\cos t\end{bmatrix} \tag{2.3.58}
$$

由此,只要 c、d 不全为零,前两个分量由于包含 $t\cos t$ 和 $t\sin t$,必然发散。这个例子表明,系统特征值位于虚轴时,系统未必等幅振荡,可能会发散!

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 取为式(2.3.12)的形式,$\boldsymbol{A}_1$ 仍按照式(2.3.5)取值,可得类似结论。这时状态响应分量中会出现 $t^2\cos t$ 和 $t^2\sin t$,发散的速度与时间 t 的幂函数相当,而不是指数函数。

对于离散系统,单位圆对应连续系统的虚轴,有类似的结论。

一般说来,线性系统的状态响应有 3 种基本成分:

$$
e^{\lambda t},\quad \sin(\omega t),\quad t^k \tag{2.3.59}
$$

λ 对应特征值实部,频率 ω 对应共轭复根的虚部,幂函数 t^k 对应 Jordan 块(阶数不低于 $k+1$)。注意到由 $e^{\lambda t}$ 和 t^k 可能会得到常数。任何状态响应的分量,要么是 3 种之一,要么是基本成分的乘积,要么是前述函数形式的线性组合。

按照这个规律,线性系统状态响应的分量,可以是阶跃函数、斜坡函数、抛物线函数、正弦余弦函数、指数函数以及它们的某些组合;但不会是双曲线、椭圆和圆弧等无法用式(2.3.59)表示的类型;作为状态变量线性组合的系统输出,自然也是如此。这也是路径规划和轨迹规划中基于多项式等曲线进行插值或拟合的一个理由。

2.4　时变自治系统的状态响应

本节讨论 n 阶线性时变自治系统

$$
\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0 \tag{2.4.1}
$$

的状态响应表达式。

系统(2.4.1)的状态响应有以下的级数表达:

$$\boldsymbol{x}(t)=\left[\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s_1)\int_{t_0}^{s_1}\boldsymbol{A}(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1+\right.$$
$$\left.\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s_1)\int_{t_0}^{s_1}\boldsymbol{A}(s_2)\int_{t_0}^{s_2}A(s_3)\mathrm{d}s_3\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1+\cdots\right]\boldsymbol{x}(t_0) \tag{2.4.2}$$

其中

$$\boldsymbol{PB}(t,t_0)=\boldsymbol{E}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s_1)\int_{t_0}^{s_1}\boldsymbol{A}(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1+$$
$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s_1)\int_{t_0}^{s_1}\boldsymbol{A}(s_2)\int_{t_0}^{s_2}\boldsymbol{A}(s_3)\mathrm{d}s_3\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1+\cdots \tag{2.4.3}$$

称为 Peano-Baker 级数。于是,式(2.4.2)可以简记为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{PB}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{2.4.4}$$

级数(2.4.3)收敛,且可逐项求导。为证明式(2.4.2),只需验证其满足状态方程(2.4.1)即可。

如果状态变量 $x(t)$是一维的,即 $x(t)$、$A(t)$、x_0 都是标量,那么根据高等数学的相关知识,式(2.4.1)的解总可以表示为

$$x(t)=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s}x_0 \tag{2.4.5}$$

其中

$$\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s}=E+\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s\right]^2+\frac{1}{3!}\left[\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s\right]^3+\cdots \tag{2.4.6}$$

当 $\boldsymbol{x}(t)$是向量时,式(2.4.5)仍然成立吗?答案是否定的,即一般说来式(2.4.5)不能成立。但如果有以下条件:

$$\boldsymbol{A}(t)\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\right]=\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s\right]\boldsymbol{A}(t) \tag{2.4.7}$$

即式(2.4.7)中的两个矩阵满足乘法交换律,那么式(2.4.5)仍然是式(2.4.1)的解。这个结论可以通过把式(2.4.6)和式(2.4.7)代入式(2.4.1)来验证。若 $x(t)$是一维的,条件(2.4.7)自然成立。

上述讨论表明,高维系统相对于一维系统有特殊性,一些一维系统的结论不能直接推广到高维系统。与此类似的另外一个例子是矩阵指数的性质(6),见 2.2 节,同样涉及了矩阵乘法交换律,而矩阵乘法交换律只是有条件成立的,且条件极其苛刻。

式(2.4.3)中的级数 $\boldsymbol{PB}(t,t_0)$一般只具有理论意义。即便是近似的数值计算,多重积分的计算复杂度也十分巨大;如果已知式(2.4.1)的 n 组线性无关的解,那么可以精确构造出 $\boldsymbol{PB}(t,t_0)$;问题是,人们的自然思路是通过求解 $\boldsymbol{PB}(t,t_0)$来得到式(2.4.1)解,这样逻辑上就陷入死循环;式(2.4.1)的解析解,或者说 $\boldsymbol{PB}(t,t_0)$的解析解,只有在极个别的情况下才能得到。这些内容对于自动控制的应用几乎为零,这里不再详细列出。

2.5　线性自治系统的状态转移矩阵

回顾 2.2 节和 2.4 节,线性定常自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0 \tag{2.5.1}$$

的状态响应为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 \tag{2.5.2}$$

线性时变自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0 \tag{2.5.3}$$

的状态响应为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{PB}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{2.5.4}$$

其中 $\boldsymbol{PB}(t,t_0)$为 Peano-Baker 级数。不论定常系统还是时变系统,状态响应总可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{2.5.5}$$

式(2.5.5)表明,t 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t)$是 t_0 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$经过变换$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$得到的;同时,由于 $\boldsymbol{x}(t)$和 $\boldsymbol{x}(t_0)$分别代表不同时刻状态空间中两个不同的位置,矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$实际上实现了时间区间$[t_0,t]$上的位置转移。我们称$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$为线性自治系统的**状态转移矩阵**。

对于状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$有以下几点说明:

(1) 对于定常系统,$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$就是矩阵指数,可以得到解析解;

(2) 对于时变系统,$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$为 Peano-Baker 级数,通常只能得到数值解;不论哪种情况,$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$只和系统矩阵以及初始、终止时刻有关;

(3) 对于定常系统,$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$只和系统矩阵以及时刻之差$(t-t_0)$有关,因而可以简记为$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$;

(4) 注意到系统运行中状态变化即状态转移持续进行,"初始时刻"也只具有相对的意义,即$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$中的第二个时间变元有时可以是异于 t_0 的时刻。

状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$具有如下性质:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{A}(t)$

(2) $\boldsymbol{\Phi}(t,t)=\boldsymbol{E}$

(3) $[\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)]^{-1}=\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_2)$

(4) $\boldsymbol{\Phi}(t_3,t_2)\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)=\boldsymbol{\Phi}(t_3,t_1)$

2.6 线性控制系统的状态响应

本节以状态转移矩阵为工具,给出线性时变控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\quad t\in[t_0,t_\alpha] \tag{2.6.1}$$

的状态响应。线性定常控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad t\in[t_0,t_\alpha] \tag{2.6.2}$$

的状态响应,将作为时变情形的推论给出。

回顾线性时变控制系统(2.6.1)对应的自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,t_\alpha] \tag{2.6.3}$$

其状态响应是

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{2.6.4}$$

即 $\boldsymbol{x}(t)$是$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$在时间区间$[t_0,t]$上转移 $\boldsymbol{x}(t_0)$的结果。

对于控制系统(2.6.1),假设 $\boldsymbol{x}(t)$仍是$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$在时间区间$[t_0,t]$上转移某个向量的结果。由于外部输入的存在,这个向量显然不会再是 $\boldsymbol{x}(t_0)$,设其为 $\boldsymbol{h}(t)$,即假设式(2.6.1)的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}(t) \tag{2.6.5}$$

下面要确定 $\boldsymbol{h}(t)$ 的具体形式。

把式(2.6.5)代入式(2.6.1)的左端,并结合 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 的求导性质,得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}(t)]}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)\boldsymbol{h}(t) + \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{h}}(t) \\ &= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}(t) + \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{h}}(t)\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

再把式(2.6.5)代入式(2.6.1)的右端,得

$$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{2.6.7}$$

比较式(2.6.6)和式(2.6.7),得

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{h}}(t) = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{2.6.8}$$

利用 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 的可逆性,得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{h}}(t) &= [\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)]^{-1}\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

两端同时从 t_0 到 t 积分

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\boldsymbol{h}}(s)\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \tag{2.6.10}$$

即

$$\boldsymbol{h}(t) - \boldsymbol{h}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \tag{2.6.11}$$

在式(2.6.11)中取 $t=t_0$,得

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{E}\boldsymbol{h}(t_0) = \boldsymbol{h}(t_0) \tag{2.6.12}$$

代入到式(2.6.11),即得

$$\boldsymbol{h}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \tag{2.6.13}$$

把 $h(t)$ 的表达式代入式(2.6.5),并利用状态转移矩阵的性质,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}(t) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2.6.14}$$

式(2.6.14)就是线性时变控制系统(2.6.1)的状态响应,也称为系统(2.6.1)的运动方程。其中,$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$ 是初态引起的自由响应,$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s$ 是输入引起的强迫响应。

对于线性定常控制系统(2.6.2),状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 简化为矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$。根据式(2.6.14),此时状态响应简化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.6.15}$$

若 $t_0=0$,则式(2.6.15)进一步简化为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}x(0) + \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \tag{2.6.16}$$

利用矩阵指数的性质,式(2.6.1,6)有以下变形:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}x(0) + \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}x(0) + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\left[x(0) + \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s\right] \end{aligned} \tag{2.6.17}$$

可在理论分析或具体计算中灵活选择。

利用线性控制系统状态响应(2.6.14),可以揭示系统自由响应(即初态响应)和脉冲响应之间的关系。在系统(2.6.1)中,令系统初态 $\boldsymbol{x}(t_0)=0$,设系统为单输入,取外部输入为单位脉冲函数 $u(t)=\delta(t-t_0)$。由式(2.6.14)和脉冲函数的定义可得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\delta(s-t_0)\mathrm{d}s \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\times 0 + \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\delta(s-t_0)\mathrm{d}s \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\delta(s-t_0)\mathrm{d}s + \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0+\varepsilon}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\delta(s-t_0)\mathrm{d}s \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\delta(s-t_0)\mathrm{d}s + \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0+\varepsilon}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\times 0\mathrm{d}s \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\delta(s-t_0)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.6.18}$$

其中 ε 为任意小的正数。注意到 $t_0\leqslant s\leqslant t_0+\varepsilon$,$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{E}$,令 $\varepsilon\to 0$,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \boldsymbol{\Phi}(t_0,s)\boldsymbol{B}(s)\delta(s-t_0)\mathrm{d}s \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{B}(t_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\delta(s-t_0)\mathrm{d}s \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{B}(t_0) \end{aligned} \tag{2.6.19}$$

式(2.6.19)表明:第一,系统(2.6.1)的零初态单位脉冲响应,恰好是以 $\boldsymbol{B}(t_0)$ 为初态(即 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{B}(t_0)$)的自由响应,而 $\boldsymbol{B}(t_0)$ 为初始时刻的控制向量;第二,在理想脉冲激励下,在 t_0 时刻,系统的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 从0"突变"到

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{B}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)\boldsymbol{B}(t_0) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}(t_0) = \boldsymbol{B}(t_0) \tag{2.6.20}$$

而且这种"突变"和状态变量的物理含义无关;t_0 时刻之后,状态响应是由状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 主导的"渐变"过程。

以上结论是基于时变系统给出的,对于线性定常系统自然也成立。根据这个结论,系统的非零初始状态引起的响应,等价于某个脉冲响应。这也从一个侧面说明,讨论系统外部激

励的作用,必须以零初态为前提,否则就相当于系统存在多个外部激励,从而引起混乱。这也是提及传函时通常设初值为零的根本原因。

离散的线性时变或定常控制系统,也有对应的状态转移矩阵,为一系列系统矩阵的乘积;也可以用状态转移矩阵来表示系统的状态响应。

对于连续的线性系统,状态转移矩阵总是可逆的,因而形式上看状态转移的过程也是可逆的;对于离散的线性系统,状态转移矩阵有可能不可逆,原因是系统矩阵未必可逆。若可逆性不成立,状态转移的过程也就不可逆。这有时会导致离散系统和连续系统对应结论的一些差别。

本章小结

控制系统状态响应属于系统分析的内容,同时也服务于进一步的系统分析和设计。这部分内容数学性的表述很多,常规的编排往往过于理论化。本章尽量压缩了以往与控制关联不大的环节,力图简明扼要地给出状态响应推导过程。

本章的核心概念是矩阵指数和状态转移矩阵,而矩阵指数的计算又是状态响应和输出的基础。

把矩阵指数表为有限项和时,其各项系数作为时间的函数未必线性无关;例子表明,系统极点位于虚轴上时系统未必等幅振荡;线性系统的模态为时间的幂函数、指数函数和正弦函数及其组合。这些都是本章需要关注的基础问题。

习题 2

2.1 计算下列矩阵的矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}$

2.2 分别用 4 种方法计算下列矩阵的矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$

2.3 求解下列系统的状态响应。

(1) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}e^{-2t}$, $\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

2.4 对于某线性定常系统,已知其状态转移矩阵、输入向量,初态分别为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$$

当输入 $u(t)$取下列信号时,分别计算系统的状态响应。

(1) $u(t)=\delta(t)$

(2) $u(t)=1(t)$

(3) $u(t)=t$

(4) $u(t)=0.5t^2$

(5) $u(t)=\sin(t)$

2.5 对于线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u,\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

当输入 $u(t)$为习题 2.4 中(1)~(5)的不同信号时,分别计算系统的状态响应。

2.6 已知某个线性定常系统的状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}0.5(e^{-t}+e^{3t}) & 0.25(e^{-t}+e^{3t})\\ e^{-t}+e^{3t} & 0.5(e^{-t}+e^{3t})\end{bmatrix}$$

据此求解系统矩阵 $\boldsymbol{A}$。

2.7 函数矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}0.5(e^{-t}+e^{3t}) & 0.25(e^{-2t}+e^{3t})\\ e^{-2t}+e^{3t} & 0.5(e^{-t}+e^{4t})\end{bmatrix}$$

是否为某个线性定常系统的状态转移矩阵?为什么?

2.8 利用 Laplace 变换证明,线性系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$,$t\geqslant 0$ 的状态响应为

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s$$

2.9 设线性时变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}A_{11}(t) & A_{12}(t)\\ A_{21}(t) & A_{22}(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}b_1(t)\\ b_2(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\quad t\geqslant t_0$$

的状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{11}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{12}(t,t_0)\\ \boldsymbol{\Phi}_{21}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{22}(t,t_0)\end{bmatrix}$$

证明:若 $A_{21}(t)=0$,则必有$\boldsymbol{\Phi}_{21}(t,t_0)=0$。

2.10 对于 2 阶定常自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\quad t\geqslant 0$$

与初态

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

对应的状态响应分别为

$$\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

求系统矩阵 $\boldsymbol{A}$；改动给定的初态或响应，是否一定能求得系统矩阵 $\boldsymbol{A}$？

第3章

线性控制系统的能控性和能观测性

能控性和能观测性是系统的两个基本结构特性。随着状态空间描述的引入，Kalman在20世纪60年代初首先提出并研究了能控性和能观测性这两个基本概念。系统和控制理论的发展表明，这两个概念对于控制和估计问题的研究意义重大：在理论层面，它们为线性控制系统理论建立了严谨的理论基础；在应用层面，在系统设计阶段，它们为关键信号的获取方式和调节方式、关键振型的配置或对消等问题，进行宏观的预判和布局，是系统设计的前提。

本章中，首先明确能控性和能观测性的目的，给出能控性和能观测性的严格数学定义；其次针对线性控制系统，包括时变和定常的情形讨论能控性和能观测性的判别方法；最后讨论基于能控性和能观测性讨论系统标准型和结构分解等内容。

非线性控制系统自然有能控性和能观测性的问题，但无法建立统一的判别方法。因而，本章对于能控性和能观测性的判别仅针对线性控制系统进行。

对于离散控制系统的能控性和能观测性与连续系统基本是平行的，但有区别，本章只做概要介绍，详细内容可参考计算机控制或离散控制系统等教材。

能控性和能观测性属于控制系统的定性描述，而非定量描述。学习本章，要注意体会概念中蕴涵的时间和空间变化特性；再者，能控和能观测本来是针对状态变量的概念，但各种判据都是依据系统的结构和参数给出的，这恰好体现了系统结构决定系统功能这一基本思想。

3.1 能控性和能观测性概述

在控制系统的状态空间描述中，输入和输出组成系统的外部信号，所有的状态变量代表系统的内部信号。对于实际的控制系统，状态变量之间往往是直接或间接耦合的。如第1章所述，状态空间法的基本思路是：通过选取控制输入，使得在过渡过程和稳态过程中全体状态变量各安其位，再由这些状态变量得到满意的系统被控输出，即跟随参考信号(参考输入、设定值)。

这里面蕴涵了两个问题：

(1) 控制输入能否在有限时间内让系统状态精准到达状态空间内的任意指定位置？即在理论上是否存在一个控制律？

(2) 要调节全体状态，本质上就需要知道全体状态变量任意时刻在状态空间中的确切位置；但系统可供利用的信号只有输入和量测输出。根据这些已知信号，理论上能够实时精准确定全部状态变量吗？

第一个问题对应系统的能控性概念，第二个问题对应系统的能观测性概念。能控，是指输入能够控制全体状态变量；能观测，是指输入和量测输出能够确定全体状态变量。两个概念的核心都是状态变量。

在图 3.1.1 所示电路中，电源电压 $u(t)$ 为控制输入，两个电容电压 $u_{C_1}(t)$ 和 $u_{C_2}(t)$ 取为状态变量。所以，状态空间就是 $u_{C_1}(t)-u_{C_2}(t)$ 二维平面。若电路元件参数满足

$$C_1 = C_2,\quad R_1 = R_2 \tag{3.1.1}$$

则由电路知识可知，对于任意时间 t，总有

$$u_{C_1}(t) = u_{C_2}(t) \tag{3.1.2}$$

即系统状态只能在式(3.1.2)确定的一条直线上，无法到达二维平面的任意指定位置，即状态变量不完全能控。

在图 3.1.2 所示电路中，电源电压 $u(t)$ 为控制输入，电感电流 $i_L(t)$ 和电容电压和 $u_C(t)$ 取为状态变量，$u_C(t)$ 同时选取为系统的输出。若电路元件参数满足

$$R_1/R_2 = R_3/R_4 \tag{3.1.3}$$

即电桥平衡，则由电路知识可知，对于任意时间 t，总有

$$u_C(t) = 0 \tag{3.1.4}$$

即系统输出恒为零，不论电流 $i_L(t)$ 如何变化取值。这样，就无法通过 $u(t)$ 和 $u_C(t)$ 判断状态变量 $i_L(t)$。

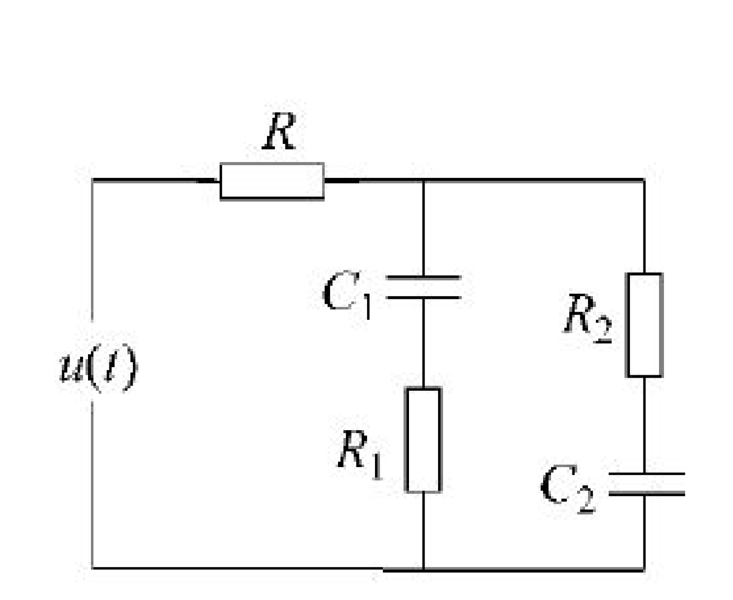


图 3.1.1　不完全能控电路

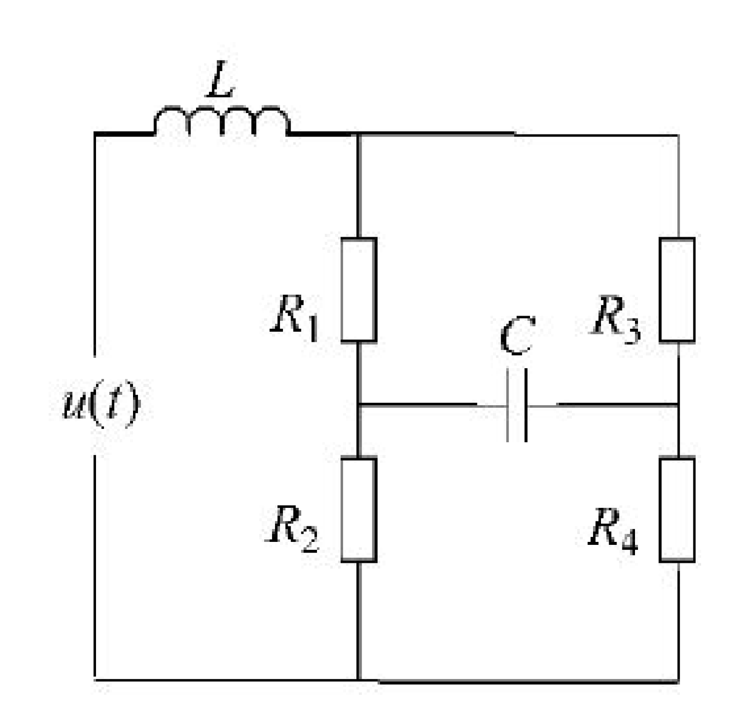


图 3.1.2　不完全能观测电路

3.2　能控性的一般概念

考虑连续的 n 阶非线性时变控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t],\quad \boldsymbol{x}(t_0) = [\xi_1\ \ \cdots\ \ \xi_n]^{\mathrm{T}} \tag{3.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为控制输入向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为不全为零的常数。状态的能控性与系统输出无关，所以这里不考虑输出方程。

状态的能控性问题包括以下几条：

(1) 待处理对象：$\boldsymbol{x}(t_0)$，包括时刻 t_0，以及这一时刻的已知常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，即在状态空间中的一个具体位置。

(2) 目标：$\boldsymbol{x}(t_f)=0$，t_f 为 t_0 之后的某个有限时刻。这里选择零向量作为目标状态，是因为任何一个非零的目标状态都可以通过坐标平移转换为零向量。

(3) 工具：

① 状态方程(3.2.1)的结构和参数；

② 时刻 t_0 和常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$。

(4) 手段：选取时刻 t_f，以及控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$。可以想见，t_f 和 $\boldsymbol{u}(t)$ 一般说来要依赖(3)中的①和②。

(5) 关键：上述控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 存在的条件是什么？

以上第(5)条属于能控性判别条件或方法；总结以上的(1)～(4)，有如下的状态能控性定义：

定义 3.2.1　对于 t_0 时刻和这一时刻不全为零的已知常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，若存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t),t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$，则称 t_0 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_n]^{\mathrm{T}}$ 是能控的。

对于上述定义，有以下几点解读：

(1) $x(t_0)$是否能控和时刻 t_0 有关，即相同的状态分量、不同的时刻 t_0 可能导致不同的能控性；

(2) $x(t_0)$是否能控和状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 有关，即不同的状态分量、相同的时刻 t_0 可能导致不同的能控性；

(3) 能控性实际上是探讨能否用低维的控制输入向量调节高维的状态向量。控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$使系统状态从 $\boldsymbol{x}(t_0)\neq 0$ 到 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$，这种转移不是立竿见影、一蹴而就的，而是依托时间区间$[t_0,t_f)$的。形象地说，是用时间来换取空间位置的转移。

研究表明，对于时变系统，状态能控性往往和时刻 t_0 有关；对于非线性系统，状态能控性通常和状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 即空间中的具体位置有关。

一般的非线性控制系统无法建立状态能控的统一判别条件，本章对能控性的讨论主要针对线性控制系统展开。

3.3　时变控制系统的能控性

考虑 n 阶时变线性控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_n]^{\mathrm{T}} \tag{3.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$为控制输入向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是不全为零的已知常数。对于该系统，有如下定义：

定义 3.3.1　对于 t_0 时刻和这一时刻不全为零的已知常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，

(1) 若存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t),t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$，则称 t_0 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_n]^{\mathrm{T}}$ 是能控的；

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的任意取值，存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t),t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$，则称在 t_0 时刻状态完全能控，或称系统在 t_0 时刻完全能控，简称系统在 t_0 时刻能控。

对上述定义有几点解读：

① 由于系统是时变的，能控性概念始终依赖具体的 t_0 时刻。t_0 取值的改变通常会带来能控性的改变；

② 定义中有从单个状态能控到全体状态能控的过渡；

③ 定义中有从状态能控到系统能控的过渡。其合理性在于，状态空间的基础概念部分曾提到，状态变量可以用来代表整个系统。

在系统运行过程中，状态总是不断变化的。因此，相对于单个状态能控，人们显然更加关注全体状态是否能控，即系统是否能控。

下面给出时变线性控制系统(3.3.1)的能控性判据，并给出证明。为避免复杂的数学理论(集合测度和 Lebesgue 积分等)，这里假设系统(3.3.1)中 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\boldsymbol{B}(t)$的元素是分段连续

函数，这样足以保证系统(3.3.1)的状态响应存在且唯一。定理 3.3.1 的证明过程需要以下 3 个引理：

引理 3.3.1　若函数 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 分段连续、非负且 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$，则对 $[a,b]$ 的任意连续点 t，有 $f(t)=0$。

引理 3.3.2　对于 n 维列向量 $\boldsymbol{h}=[h_1 \quad \cdots \quad h_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}=h_1^2+\cdots+h_n^2=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{h}=0$。

引理 3.3.3　对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{W}$ 和 n 维未知列向量 $\boldsymbol{h}=[h_1 \quad \cdots \quad h_n]^{\mathrm{T}}$ 构成的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Wh}=0$，其只有零解 $\boldsymbol{h}=0$ 的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{W}$ 可逆。

对于线性时变控制系统(3.3.1)的能控性，有如下的 Gram 矩阵判据：

定理 3.3.1　时变线性控制系统(3.3.1)在 t_0 时刻能控的充分必要条件是：存在有限时刻 $t_f > t_0$，使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)]\mathrm{d}t \tag{3.3.2}$$

可逆。这里用 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 表示系统(3.3.1)的状态转移矩阵；对于矩阵的积分就是每个元素分别积分。

注意式(3.3.2)中状态转移矩阵中两个时间变量的顺序。

证明：

充分性。已知 Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 可逆，往证系统(3.3.1)在 t_0 时刻能控。根据定义 3.3.1，只需对任意非零的 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 找到控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$。

利用 $\boldsymbol{x}(t_0)$、状态转移矩和 Gram 矩阵构造控制输入

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{3.3.3}$$

根据时变线性控制系统的状态响应以及状态转移矩阵的性质，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t_f) &= \boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_f,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

把式(3.3.3)代入式(3.3.4)，并利用矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 的定义进一步计算得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t_f) &= \boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_0)]\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\left[\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_0) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{W}(t_0,t_f)\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_0) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

因此系统(3.3.1)在 t_0 时刻能控。

必要性。已知系统(3.3.1)在 t_0 时刻能控，往证 Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 可逆。为此，构造齐次线性方程组

$$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)\boldsymbol{h}=0 \tag{3.3.6}$$

设 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{h}$。由于系统(3.3.1)在 t_0 时刻能控，对于方程组(3.3.6)的任一解 $\boldsymbol{h}$，必存在控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$，即

$$0=\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_f,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t$$
$$=\boldsymbol{\Phi}(t_f,t_0)\boldsymbol{h}+\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_f,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t \tag{3.3.7}$$

于是

$$\boldsymbol{h}=-\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_f,t_0)\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_f,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t$$
$$=-\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_f)\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_f,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t$$
$$=-\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_f)\boldsymbol{\Phi}(t_f,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t$$
$$=-\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t \tag{3.3.8}$$

式(3.3.6)推出

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(t_0,t_f)\boldsymbol{h}=0 \tag{3.3.9}$$

把 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$的定义代入式(3.3.9),计算得

$$0=h^{\mathrm{T}}\left\{\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)]\mathrm{d}t\right\}\boldsymbol{h}$$
$$=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\boldsymbol{h}]\mathrm{d}t$$
$$=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\boldsymbol{h}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\boldsymbol{h}]\mathrm{d}t$$
$$=\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)\mathrm{d}t \tag{3.3.10}$$

其中定义

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\boldsymbol{h} \tag{3.3.11}$$

由于 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\boldsymbol{B}(t)$的元素分段连续,被积函数 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)$也分段连续;$\boldsymbol{z}(t)$是一个列向量(单输入时简化为标量),$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)$恰为其各个分量的平方和,因而非负。结合引理 3.3.1,由式(3.3.10)可知,对于 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)$在区间$[t_0,t_f]$的任意连续点 t,有

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\boldsymbol{h}=0 \tag{3.3.12}$$

即

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)=0 \tag{3.3.13}$$

利用式(3.3.8)计算得

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}=-\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\left[\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=-\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)]\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t \tag{3.3.14}$$

因为间断点处的函数值不影响积分值,由式(3.3.13)和式(3.3.14)得

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}=-\int_{t_0}^{t_f}0\times\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.3.15}$$

利用引理 3.3.2,得 $\boldsymbol{h}=0$。这样一来,方程组(3.3.6)就只有零解。根据引理 3.3.3,Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$可逆,证明完成。

对于定理 3.3.1,有以下几点说明:

① 若 $\boldsymbol{W}(t_0,t_{f_1})$可逆,$t_{f_1}<t_{f_2}$,则 $\boldsymbol{W}(t_0,t_{f_2})$可逆;若 $\boldsymbol{W}(t_0,t_{f_2})$不可逆,$t_{f_1}<t_{f_2}$,则 $\boldsymbol{W}(t_0,t_{f_1})$不可逆。

② 式(3.3.2)中,被积对象是 n 阶方阵。控制输入的维数一般远小于状态空间的维数 n。如单输入的情形,输入矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$的秩是 1,因此整个被积矩阵的秩也是 1,当 $n>1$ 时,被积矩阵一定不可逆。但 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$作为积分、作为对时间的累加却有可能可逆,从而保证系统能控。这里再次体现了以时间换取空间位置转移的思想。

③ 由于时变线性系统的状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$一般难以求解,Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$因此也难以求解。因此,时变线性控制系统的 Gram 矩阵难以直接用于判断系统能控性,通常只具有理论意义。例如,这个判据可以自然衍生出定常线性控制系统能控性的 Gram 矩阵,进而得到定常情形的一系列实用判据。详见 3.4 节。这样的证明思路相对来说完整、明了。

3.4　定常控制系统的能控性

考虑 n 阶定常线性控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\ \ \cdots\ \ \xi_n]^{\mathrm{T}} \tag{3.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$为状态向量,$\boldsymbol{u}(t)$为控制输入向量,t_0 是某个被关注的时刻,未必是初始时刻,状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为不全为零的已知常数。

定常系统(3.4.1)是时变系统(3.3.1)的特例,因此原则上可以沿用关于时变系统(3.3.1)的能控性定义和判据;同时,由于是特例,自然要进一步探讨定义和判据有无新特性。

依照定理 3.3.1,定常系统(3.4.1)在 t_0 时刻能控的充分必要条件是:存在有限时刻 $t_f>t_0$,使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)]\mathrm{d}t \tag{3.4.2}$$

可逆,$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$表示定常系统(3.4.1)的状态转移矩阵。

根据 2.5 节的讨论,对于定常系统(3.4.1),状态转移矩阵简化为矩阵指数,即

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} \tag{3.4.3}$$

代入式(3.4.2)并做积分变量替换

$$s=t-t_0 \tag{3.4.4}$$

可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}(t_0,t_f)&=\int_{t_0}^{t_f}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t_0-t)}]\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{t_f-t_0}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}s}]\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

再次做积分变量替换 $s=t$,并记

$$t_L=t_f-t_0 \tag{3.4.6}$$

得

$$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)=\int_{0}^{t_L}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}]\mathrm{d}t \tag{3.4.7}$$

式(3.4.7)表明,$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$的可逆性在形式上与时间间隔 $T=t_f-t_0$ 有关,而与时刻 t_0 的取值无关。因此,有别于时变系统,在讨论定常线性系统的能控性时,完全不必考虑时刻

t_0 这一因素。

基于以上结论,对于定常线性控制系统(3.4.1)有如下的能控性定义:

定义 3.4.1 对于 t_0 时刻不全为 0 的已知常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$,

(1) 若存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t),t\in[t_0,t_f)$,使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$,则称状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad\cdots\quad\xi_n]^{\mathrm{T}}$ 是能控的;

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的任意取值,存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t),t\in[t_0,t_f)$,使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=0$,则称状态完全能控,或称系统完全能控,简称系统能控。

由定理 3.3.1 简化得到的、定常系统(3.4.1)的能控性判据如下:

定理 3.4.1 (Gram 矩阵判据)定常系统(3.4.1)能控的充分必要条件是,存在 $t_L>0$,使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{W}(t_L)=\int_0^{t_L}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}]\mathrm{d}t \tag{3.4.8}$$

可逆。

事实上,Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_L)$的可逆性由系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和控制矩阵 $\boldsymbol{B}$ 决定,形式上与 t_L 有关,但本质上与 t_L 的取值无关(包括负值),只要 $t_L\neq 0$。

矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 可以得到解析表达式,但当系统阶次较高时,获取 Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_L)$的计算量复杂度仍然很高。

下面从 Gram 矩阵判据出发,给出其他相对易于计算的能控性判据。首先给出几个证明中需要的引理。

引理 3.4.1 设 $\boldsymbol{Q}$ 是行数为 n 的矩阵。有非零 n 维列向量 $\boldsymbol{a}=[a_1\quad\cdots\quad a_n]^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=0$ 的充分必要条件是 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}<n$。

证明:设矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的 n 个行向量依次为 $\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n$。于是

$$0=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=a_1\boldsymbol{q}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{q}_n \tag{3.4.9}$$

恰为向量 $\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n$ 的线性组合。

若组合系数 $a_1,\cdots,a_n$ 不全为零,则向量组 $\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n$ 线性相关,秩小于 n,因此,以 $\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n$ 为行组成的矩阵 $\boldsymbol{Q}$,其秩也小于 n。

若 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}<n$,则 $\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n$ 线性相关,方程(3.4.9)必存在非零解 $a_1,\cdots,a_n$,即有非零列向量 $\boldsymbol{a}$ 使得 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=0$。证明完成。

引理 3.4.2 对于矩阵 $\boldsymbol{H}(t)$,积分$\int_a^b\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}(t)\mathrm{d}t$ 半正定。其中矩阵 $\boldsymbol{H}(t)$ 的元素均为分段连续函数。

证明:对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\left[\int_a^b\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}(t)\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{a}\\&=\int_a^b[\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{a}]\mathrm{d}t\\&=\int_a^b[\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{a}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{a}]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{a}$ 是列向量,$[\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{a}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{a}]$是其分量的平方和,非负。于是由积分的保号性得

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\left[\int_a^b\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}(t)\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{a}=\int_a^b[\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{a}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{a}]\mathrm{d}t\geqslant 0 \tag{3.4.11}$$

所以 $\int_a^b \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}(t)\mathrm{d}t$ 半正定。

引理 3.4.3　矩阵 $\boldsymbol{H}$ 半正定等价于存在矩阵 $\boldsymbol{G}$，使得 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}$。

定理 3.4.2　(秩判据)定常线性系统(3.4.1)能控的充分必要条件是，如下能控性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_C(n)=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \tag{3.4.12}$$

行满秩，即 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)=n$，而 n 就是 $\boldsymbol{Q}_C(n)$ 的行数。

证明：根据定理 3.4.1，只需证明

$$\text{存在 } t_L>0 \text{ 使得 } \boldsymbol{W}(t_L) \text{ 可逆} \Leftrightarrow \mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)=n \tag{3.4.13}$$

为此，只需证明

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)<n \Leftrightarrow \boldsymbol{W}(t_L) \text{ 对任意 } t_L>0 \text{ 均不可逆} \tag{3.4.14}$$

已知 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)<n$，往证 $\boldsymbol{W}(t_L)$ 对任意 $t_L>0$ 均不可逆：

根据引理 3.4.1，存在非零向量 $\boldsymbol{a}$ 使得 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_C(n)=0$，即

$$0=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}\quad \cdots \quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \tag{3.4.15}$$

于是有

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=0,\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=0,\cdots,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}=0 \tag{3.4.16}$$

根据 Caley-Hamilton 定理，$\boldsymbol{A}^k(k\geqslant n)$ 可以表示为 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 的线性组合。因此

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}=0,\quad k\geqslant n \tag{3.4.17}$$

根据式(3.4.16)和式(3.4.17)，对任意的正数 t_L，有

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\frac{(-\boldsymbol{A}t)^i}{i!}\boldsymbol{B}=0,\quad i\geqslant 0,\quad t\in[0,t_L] \tag{3.4.18}$$

结合矩阵指数的级数定义，得

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\boldsymbol{A}t)^i}{i!}\boldsymbol{B}=0,\quad t\in[0,t_L] \tag{3.4.19}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(t_L)\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\left[\int_0^{t_L}(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t})\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{a}\\&=\int_0^{t_L}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{T}t}\boldsymbol{a})\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

观察式(3.4.8)，根据引理 3.4.2 可知 $\boldsymbol{W}(t_L)$ 是半正定矩阵。由引理 3.4.3，存在矩阵 $\boldsymbol{G}$ 使得

$$\boldsymbol{W}(t_L)=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G} \tag{3.4.21}$$

代入式(3.4.20)，得

$$0=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(t_L)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{G}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}) \tag{3.4.22}$$

$(\boldsymbol{G}\boldsymbol{a})$ 是列向量，于是由引理 3.3.2 得

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}=0 \tag{3.4.23}$$

两端左乘矩阵 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}$，得

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}=0 \tag{3.4.24}$$

由式(3.4.21)即得

$$\boldsymbol{W}(t_L)\boldsymbol{a}=0 \tag{3.4.25}$$

即对任意的 $t_L>0$,线性方程组(3.4.25)有非零解 $\boldsymbol{a}$。根据引理 3.3.3,$\boldsymbol{W}(t_L)$不可逆。

已知 $\boldsymbol{W}(t_L)$对任意的 $t_L>0$ 均不可逆,往证 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)<n$。

$\boldsymbol{W}(t_L)$不可逆,据引理 3.3.3,存在非零列向量 $\boldsymbol{a}$,使得 $\boldsymbol{W}(t_L)\boldsymbol{a}=0$。于是

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(t_L)\boldsymbol{a}\\&=\int_0^{t_L}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{a})\mathrm{d}t\\&=\int_0^{t_L}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.4.26}$$

注意到$(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$ 是列向量、$(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$ 非负。由引理 3.3.1 得

$$(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=0 \tag{3.4.27}$$

再由引理 3.3.2 得

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}=0 \tag{3.4.28}$$

式(3.4.28)两端对时间 t 求导,直至 $n-1$ 次;在式(3.4.28)和各个求导所得等式中取 $t=0$,得

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=0,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=0,\cdots,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}=0 \tag{3.4.29}$$

于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_C(n)&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\\&=[\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\\&=0\end{aligned} \tag{3.4.30}$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量,根据引理 3.4.1 可知 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)<n$。证明完成。

考虑系统(3.4.1)的状态可逆变换$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 以及变换后的状态方程

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t) \tag{3.4.31}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},\quad \bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{3.4.32}$$

注意到 $\bar{\boldsymbol{A}}^k=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}$,系统(3.4.31)的能控性判别矩阵为

$$\begin{aligned}[\bar{\boldsymbol{B}}\quad \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{B}}\quad \cdots\quad \bar{\boldsymbol{A}}^{n-1}\bar{\boldsymbol{B}}]&=[\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\\&=\boldsymbol{P}^{-1}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\end{aligned} \tag{3.4.33}$$

即变换前后的判别矩阵只差一个可逆变换,所以具有相同的秩。由此,状态的可逆变换不改变系统的能控性。

若系统为多输入,则判别矩阵(3.4.12)的列数多于行数 n。当系统(3.4.1)能控时,称使得

$$\boldsymbol{Q}_C(\mu)=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{\mu-1}\boldsymbol{B}] \tag{3.4.34}$$

行满秩的最小整数 μ 为系统的能控性指数。对于能控的 n 阶单输入系统,显然 $\mu=n$。这一概念主要是针对多输入系统的,可用于其分析和设计。能控性指数的一个直观作用在于简化判别矩阵。

设系统(3.4.1)为 p 输入,即控制矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 p 列。判别矩阵 $\boldsymbol{Q}_C(\mu)$是 $n\times\mu p$ 的,其秩为 n 的必要条件是 $n\leqslant\mu p$,即 $n/p\leqslant\mu$。

再设 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}=r\leqslant p$,则为使 $\boldsymbol{Q}_C(\mu)$的秩达到 n,$\boldsymbol{B}$ 提供了 r 个列向量。在此基础上,若

$\boldsymbol{AB}$ 提供的列向量都能被 $\boldsymbol{B}$ 的各列线性表示，则后面的 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}$……也是如此，这样 $\boldsymbol{Q}_C(\mu)$ 的秩只能是 r，不会达到 n。因此，$\boldsymbol{AB}$ 至少能够提供 1 个列向量，与其左侧 $\boldsymbol{B}$ 的各列线性无关。同理，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}$、……、$\boldsymbol{A}^{\mu-1}\boldsymbol{B}$ 各自都至少能够提供 1 个列向量，与其左侧的各列线性无关。由此得到 $r+\mu-1\leqslant n$，即 $\mu\leqslant n+1-r$。

综上，能控性指数 $n/p\leqslant\mu\leqslant n+1-r$。

定理 3.4.3　(PBH 秩判据，振型判据)定常系统(3.4.1)能控的充分必要条件是，对系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值(振型)λ，有

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]=n \tag{3.4.35}$$

即$[\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]$行满秩。

证明：根据定理 3.4.2，只需证明

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)=n\Leftrightarrow\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]=n,\quad \lambda\text{ 为 }\boldsymbol{A}\text{ 的任意特征值} \tag{3.4.36}$$

为此，只需证明

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]<n\Leftrightarrow\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)<n,\quad \lambda_0\text{ 为 }\boldsymbol{A}\text{ 的某个特征值} \tag{3.4.37}$$

已知对 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 λ_0 有 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]<n$，往证 $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)<n$。

由引理 3.4.1，存在非零列向量 $\boldsymbol{a}$ 使得

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]=0 \tag{3.4.38}$$

即

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\lambda_0\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=0 \tag{3.4.39}$$

于是

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\lambda_0\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=0\\&\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AAB}=\lambda_0\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=0\\&\qquad\vdots\\&\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}=\cdots=0\end{aligned} \tag{3.4.40}$$

由式(3.4.39)和式(3.4.40)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_C(n)&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad\cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\\&=[\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}\quad\cdots\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\\&=0\end{aligned} \tag{3.4.41}$$

根据由引理 3.4.1 即得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)<n$。

已知 $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)<n$，往证对 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 λ_0 有 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]<n$。

根据引理 3.4.1，存在非零向量 $\boldsymbol{a}$ 使得 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_C(n)=0$，即

$$0=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad\cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}\quad\cdots\quad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \tag{3.4.42}$$

于是有

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=0,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=0,\cdots,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}=0 \tag{3.4.43}$$

注意到向量

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a},\cdots,(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{a} \tag{3.4.44}$$

都是以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为系数矩阵、$\boldsymbol{h}$ 为未知量的齐次线性方程组

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}=0 \tag{3.4.45}$$

的解，属于其解空间。

设整数 r 使得行向量组

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r-1} \tag{3.4.46}$$

线性无关、但添加 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r}$ 的向量组

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r-1},\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r} \tag{3.4.47}$$

线性相关。这样确定的 r 是唯一的。因为 $1\leqslant \mathrm{rank}\boldsymbol{B}\leqslant n-1$,所以 $1\leqslant r\leqslant n-1$。

根据 r 的定义,向量 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r}$ 可被向量组(3.4.46)线性表示,于是存在一组系数 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$,使得

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r}+c_{n-1}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r-1}+\cdots+c_1\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+c_0\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{r}+c_{n-1}\boldsymbol{A}^{r-1}+\cdots+c_1\boldsymbol{A}+c_0\boldsymbol{E})\end{aligned} \tag{3.4.48}$$

构造多项式

$$f(s)=s^{r}+c_{n-1}s^{r-1}+\cdots+c_1s+c_0 \tag{3.4.49}$$

设 λ_0 是 $f(s)$的一个根,则 $f(s)$存在因式分解

$$f(s)=f_1(s)(s-\lambda_0) \tag{3.4.50}$$

其中

$$f_1(s)=s^{r-1}+d_{n-2}s^{r-2}+\cdots+d_1s+d_0 \tag{3.4.51}$$

借助式(3.4.49)和式(3.4.50),式(3.4.48)可重新表示为

$$0=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}f_1(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}) \tag{3.4.52}$$

记

$$\bar{\boldsymbol{a}}=f_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{a},\quad 或\quad \bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}f_1(\boldsymbol{A}) \tag{3.4.53}$$

结合式(3.4.52)即得

$$\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})=0 \tag{3.4.54}$$

所以

$$\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\lambda_0\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}},\quad 或\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{a}}=\lambda_0\bar{\boldsymbol{a}} \tag{3.4.55}$$

若

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}f_1(\boldsymbol{A})=0 \tag{3.4.56}$$

根据式(3.4.51),有

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{r-1}+d_{n-2}\boldsymbol{A}^{r-2}+\cdots+d_1\boldsymbol{A}+d_0\boldsymbol{E})\\&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r-1}+d_{n-2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r-2}+\cdots+d_1\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+d_0\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{3.4.57}$$

即向量组(3.4.46)线性相关,这与 r 的定义相矛盾。因此,必有

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}f_1(\boldsymbol{A})\neq 0,\quad 或\quad \bar{\boldsymbol{a}}\neq 0 \tag{3.4.58}$$

式(3.4.55)和式(3.4.58)表明,$\bar{\boldsymbol{a}}$是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量,λ_0 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值,也就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

由式(3.4.43)和 r 的定义、范围可得

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}f_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{r-1}+d_{n-2}\boldsymbol{A}^{r-2}+\cdots+d_1\boldsymbol{A}+d_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r-1}\boldsymbol{B}+d_{n-2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{r-2}\boldsymbol{B}+\cdots+d_1\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+d_0\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\\&=0\end{aligned} \tag{3.4.59}$$

至此,存在非零列向量$\bar{\boldsymbol{a}}$,对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_0,有

$$\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]=0 \tag{3.4.60}$$

根据引理 3.4.1 可知，$\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]<n$。证明完成。

定理 3.4.4　(PBH 特征向量判据)定常线性系统(3.4.1)能控的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的任意特征向量 $\boldsymbol{h}$ 均满足 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\neq 0$。

证明：只需证明，

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \text{ 的某个特征向量 } \boldsymbol{h}_0 \text{ 使得 } \boldsymbol{h}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=0 \Leftrightarrow \text{系统(3.4.1) 不能控}$$

若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的某个特征向量 $\boldsymbol{h}_0$ 使得 $\boldsymbol{h}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=0$，设对应的特征值为 λ_0，简单计算可得

$$\boldsymbol{h}_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]=0 \tag{3.4.61}$$

注意到特征向量不是零向量，由引理 3.4.1 可知

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]<n \tag{3.4.62}$$

根据定理 3.4.3，系统(3.4.1)不能控。

若系统(3.4.1)不能控，由定理 3.4.2 可知 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_C(n)<n$。按照定理 3.4.3 证明的后半部分可以构造出 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 和特征值 λ_0，使得式(3.4.60)成立，从而有 $\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=0$。证明完成。

对于线性定常控制系统的能控性判别，除了上述 4 个定理，还有 Jordan 标准型判据。为了避免符号过于复杂，这里举例说明判别方法。

按照向量线性相关或无关的定义，单个向量 $\boldsymbol{h}$ 线性相关等价于 $\boldsymbol{h}=0$，线性无关等价于 $\boldsymbol{h}\neq 0$；标量视为 Jordan 块的特例。

【例 3.4.1】　考虑如下的系统矩阵为上三角 Jordan 型矩阵的 10 阶线性定常控制系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_{31}\\ \dot{x}_{32}\\ \dot{x}_{411}\\ \dot{x}_{421}\\ \dot{x}_{422}\\ \dot{x}_{431}\\ \dot{x}_{432}\\ \dot{x}_{433}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 &&&&&&&&& \\ & a_2 &&&&&&&& \\ && a_3 & 1 &&&&&& \\ &&& a_3 &&&&&& \\ &&&& a_4 &&&&& \\ &&&&& a_4 & 1 &&& \\ &&&&&& a_4 &&& \\ &&&&&&& a_4 & 1 & 0 \\ &&&&&&&& a_4 & 1 \\ &&&&&&&&& a_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_{31}\\ x_{32}\\ x_{411}\\ x_{421}\\ x_{422}\\ x_{431}\\ x_{432}\\ x_{433}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\\ *\\ \boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{b}_{41}\\ *\\ \boldsymbol{b}_{42}\\ *\\ *\\ \boldsymbol{b}_{43}\end{bmatrix}u \tag{3.4.63}$$

其中，特征值 a_1,a_2,a_3,a_4 两两互异；控制矩阵拆分为 10 个行向量。

由于系统矩阵为上三角形式，因此只需关注每个 Jordan 块最后一行所对应的控制矩阵的行，例如，如控制矩阵的最后一行 $\boldsymbol{b}_{43}$ 需要列出，因为对应最后一个 3 阶 Jordan 块的最后一行即 $[0\quad \cdots\quad 0\quad a_4]$。* 表示的行对于判断系统能控性不起作用。

根据 Jordan 标准型判据，系统(3.4.63)能控的充分必要条件是，4 个向量组 $\{\boldsymbol{b}_1\}$、$\{\boldsymbol{b}_2\}$、$\{\boldsymbol{b}_3\}$、$\{\boldsymbol{b}_{41},\boldsymbol{b}_{42},\boldsymbol{b}_{43}\}$ 均为线性无关；或者说，$\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$、$\boldsymbol{b}_3$ 均非零，且向量 $\boldsymbol{b}_{41}$、$\boldsymbol{b}_{42}$、$\boldsymbol{b}_{43}$ 线性无关。

该结论的证明可由定理 3.4.3 直接给出。

进行判别时，控制矩阵中对应同一特征值的行归入同一组，不同的组之间没有联系。

根据线性代数知识，$n+1$ 个 n 维向量必然线性相关。因此，在例 3.4.1 中 $\boldsymbol{b}_{41},\boldsymbol{b}_{42},\boldsymbol{b}_{43}$ 线

性无关的前提是,它们的维数不小于3,而这个维数也就是控制输入的维数。注意到$\{\boldsymbol{b}_{41},\boldsymbol{b}_{42},\boldsymbol{b}_{43}\}$中向量的数目就是对应特征值$a_4$的几何重数,或Jordan块数目。由此可以断言:系统能控的必要条件之一,是控制输入维数不低于特征值的几何重数。对此,一个极端的例子是系统矩阵为单位矩阵的情形。特征值的重数影响系统能控性,但真正影响能控性的是几何重数,而非代数重数。

在系统(3.4.63)中,系统矩阵和控制矩阵可能出现复数元素。下面举例说明当系统为实Jordan标准型时的能控性判据。这时系统矩阵和控制矩阵都是实数矩阵。

【例3.4.2】 考虑如下的系统矩阵为实Jordan型矩阵的10阶线性定常控制系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{111} \\ \dot{x}_{112} \\ \dot{x}_{113} \\ \dot{x}_{114} \\ \dot{x}_{121} \\ \dot{x}_{122} \\ \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 & 0 & & & & & & \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & \alpha_1 & \beta_1 & & & & & & \\ & & -\beta_1 & \alpha_1 & & & & & & \\ & & & & \alpha_1 & \beta_1 & & & & \\ & & & & -\beta_1 & \alpha_1 & & & & \\ & & & & & & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & & & & & -\beta_2 & \alpha_2 & & \\ & & & & & & & & \alpha_3 & \\ & & & & & & & & & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{111} \\ x_{112} \\ x_{113} \\ x_{114} \\ x_{121} \\ x_{122} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * \\ * \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{b}_4 \\ \boldsymbol{b}_5 \\ \boldsymbol{b}_6 \\ \boldsymbol{b}_7 \\ \boldsymbol{b}_8 \end{bmatrix} u \tag{3.4.64}$$

其中,系统矩阵为分块上三角结构,代表特征值的(α_1,β_1),(α_2,β_2),$(\alpha_3,0)$,$(\alpha_4,0)$两两互异,代表特征值虚部的β_1,β_2均不为零;控制矩阵拆分为10个行向量。

系统(3.4.64)完全能控的充分必要条件是:

$$\text{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ -\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_4 \\ -\boldsymbol{b}_4 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} = 4, \quad \text{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_5 & \boldsymbol{b}_6 \\ -\boldsymbol{b}_6 & \boldsymbol{b}_5 \end{bmatrix} = 2, \quad \boldsymbol{b}_7 \neq 0, \quad \boldsymbol{b}_8 \neq 0 \tag{3.4.65}$$

式(3.4.65)中$\boldsymbol{b}_i$的选取和分组原则与判别系统(3.4.63)时相同,这里是针对分块来进行。相应的证明同样可以借助于定理3.4.3给出。

定常线性控制系统的5种能控性判据本质上是等价的,但各有特点。矩阵判据常用于理论分析;秩判据只要知道系统矩阵和控制矩阵就可判断,不需要对系统进行预处理和先验信息;振型判据在特征值即振型已知的前提下,简单明了,在基于状态空间法的分析设计中应用最广;PBH(Popov,Belecitch,Hutaus)特征向量判据主要用于线性系统的复频率域分析;Jordan标准型判据由于系统矩阵的特殊结构,只需着眼于控制矩阵有关各行的相关性。

回顾3.1节的不完全能控电路。容易看出,只要式(3.1.1)不成立,系统就变为能控,而现实中难以做到(3.1.1)精确成立,因此,实际系统几乎总是能控的。实际上,在能控与否的定性问题上,能控性的概念主要是针对外部信号(设定值、干扰输入)与被控对象构成的扩张

被控对象或说扩张状态而言的，设定值和干扰输入本身显然都无法通过控制输入来改变。

同时，3.1 节的不完全能控电路也说明，即便系统不能控的几率不高，但有一个能控程度的问题：式(3.1.1)越接近成立，能控程度就越低。

考虑 $p\times q$ 的矩阵 $\boldsymbol{Q}$，设 $p\leqslant q$，且 $\boldsymbol{Q}$ 行满秩。则矩阵 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 是 p 阶的正定矩阵，特征值 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 都是正实数。$\sigma_i(\boldsymbol{Q})=\sqrt{\lambda_i}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的奇异值。最小的奇异值越接近 0，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 越接近不可逆，矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 越接近于行线性相关。为了计算的可靠性，还要同时考虑最大的奇异值。

基于奇异值的概念，对于能控的定常系统(3.4.1)和能控性判别矩阵 $\boldsymbol{Q}_C(n)$ 或 $\boldsymbol{Q}_C(\mu)$，可以用比值 $\sigma_1(\boldsymbol{Q}_C)/\sigma_n(\boldsymbol{Q}_C)$ 来衡量能控程度。比值越接近 0，系统越接近于不能控。

回顾式(3.4.33)，状态的可逆变换虽然不改变系统的能控性，但可能会改变能控的程度。

3.5　能观测性的一般概念

考虑连续的 n 阶非线性时变控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=f[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t],\boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad\cdots\quad\xi_n]^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{y}(t)&=g[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$为控制输入向量，$\boldsymbol{y}(t)$为可测输出向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为未知常数。

状态的能观测性问题包括以下几条。

(1) 待处理对象：$\boldsymbol{x}(t_0)$，包括时刻 t_0，以及这一时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$。

(2) 目标：$\xi_i=?$ 即要求确定状态在空间中的具体位置，而且必须是唯一解。

(3) 工具：

① 状态方程(3.2.1)的结构和参数；

② 时刻 t_0；

③ 输入 $\boldsymbol{u}(t)$和输出 $\boldsymbol{y}(t)$。

(4) 手段：选取有限时刻 $t_f>t_0$，利用 $\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{y}(t),t\in[t_0,t_f)$求解各个 ξ_i。

(5) 关键：能够求得 ξ_i 的条件是什么？

以上第(5)条属于能观测性判别条件或方法；总结以上的(1)～(4)，有如下的状态能观测性定义：

定义 3.5.1　对于 t_0 时刻和这一时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，若存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$和输出 $\boldsymbol{y}(t),t\in[t_0,t_f)$能够确定各个 ξ_i，则称 t_0 时刻的状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$是能观测的。

对于上述定义，有以下几点解读：

① $\boldsymbol{x}(t_0)$是否能观测和时刻 t_0 有关，即相同的 ξ_i 真实值、不同的时刻 t_0 可能导致不同的能观测性；

② $\boldsymbol{x}(t_0)$是否能观测和 $\boldsymbol{x}(t_0)$在状态空间中的实际位置有关，即不同的 ξ_i 真实值、相同的时刻 t_0 可能导致不同的能观测性；

③ 确定各个 ξ_i 的真实值需要时间区间$[t_0,t_f)$上的输入 $\boldsymbol{u}(t)$输出 $\boldsymbol{y}(t)$，不会在 t_0 瞬时完成，必然是个时间过程，是用时间来换取空间位置的定位。

④ 与能控性类似，能观测性探讨由低维的输入和输出确定高维状态向量的可行性。

研究表明，对于时变系统，状态能观测性往往和时刻 t_0 有关；对于非线性系统，状态能观测性通常和 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 在空间中的实际位置有关。

3.6 时变控制系统的能观测性和对偶原理

与能控性类似，一般的非线性控制系统无法建立状态能观测的统一判别条件。本节针对时变线性控制系统讨论状态能观测性问题。

考虑 n 阶时变线性控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_n]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为控制输入向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为未知常数。对于该系统，有如下定义：

定义 3.6.1 对于 t_0 时刻和这一时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，

(1) 若存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$ 能够唯一确定各个 ξ_i，则称 t_0 时刻的状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是能观测的；

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的任意未知实际值，总存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$ 能够唯一确定各个 ξ_i，则称在 t_0 时刻状态完全能观测，或称系统在 t_0 时刻完全能观测，简称系统在 t_0 时刻能观测。

对上述定义有几点解读：

① 对于时变系统，能观测性概念始终依赖具体的 t_0 时刻。t_0 取值的改变通常会带来能观测性的改变；

② 定义中有从单个状态能观测到全体状态能观测的过渡；

③ 与能控性类似，定义中有从状态能观测到系统能观测的过渡。同样，其合理性在于状态变量可以用来代表整个系统。

因为系统状态总是不断变化的，所以，相对于单个状态能观测，研究全体状态是否能观测，即系统是否能观测显然更有意义。

下面给出并证明线性时变线性控制系统(3.6.1)的能观测性判据，并给出证明。为避免复杂的数学理论，这里假设系统(3.6.1)中 $\boldsymbol{A}(t)$ 和 $\boldsymbol{C}(t)$ 的元素是连续(不是分段连续)函数，于是系统(3.6.1)的状态响应存在且唯一。

对于时变线性控制系统(3.6.1)的能控性，有如下的 Gram 矩阵判据：

定理 3.6.1 时变线性控制系统(3.6.1)在 t_0 时刻能观测的充分必要条件是：存在有限时刻 $t_f>t_0$，使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)]\mathrm{d}t \tag{3.6.2}$$

可逆。这里用 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 表示系统(3.6.1)的状态转移矩阵；与定理 3.3.1 一样，矩阵的积分就是每个元素分别积分。

证明：已知存在有限时刻 $t_f>t_0$ 使得矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 可逆，往证 t_0 时刻系统能观测。回顾 2.6 节的内容，时变系统(3.6.1)的状态响应为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \tag{3.6.3}$$

结合输出方程得系统(3.6.1)的输出响应为

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \tag{3.6.4}$$

输出响应第一项为初态 $\boldsymbol{x}(t_0)$引起的自由响应,第二项为输入 $\boldsymbol{u}(t)$引起的强迫响应。移项得

$$\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{3.6.5}$$

两端左乘矩阵$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)$,并对 t 从 t_0 到 t_f 积分,得

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_f}\{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s]\}\mathrm{d}t\\
&=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)]\mathrm{d}t\\
&=\left\{\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)]\mathrm{d}t\right\}\boldsymbol{x}(t_0)\\
&=\boldsymbol{W}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_0)
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

因为 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$可逆,所以有

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)\int_{t_0}^{t_f}\{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s]\}\mathrm{d}t \tag{3.6.7}$$

于是由 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{y}(t)$得到了 $\boldsymbol{x}(t_0)$的唯一解。这样的构造显然对任意的 $\boldsymbol{x}(t_0)$都适用,即不论 $\boldsymbol{x}(t_0)$在状态空间什么位置,都可以这样构造。因此系统在 t_0 时刻能观测。

已知系统在 t_0 时刻能观测,往证存在有限时刻 $t_f>t_0$ 使得矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$可逆。只需证明,$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$对任意 $t_f>t_0$ 不可逆导致系统在 t_0 时刻不能观测。

矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$不可逆,根据引理 3.3.3,存在非零向量 $\boldsymbol{h}$ 使得 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)\boldsymbol{h}=0$,于是有

$$\begin{aligned}
0&=\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(t_0,t_f)\boldsymbol{h}\\
&=\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\left\{\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)]\mathrm{d}t\right\}\boldsymbol{h}\\
&=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}]\mathrm{d}t\\
&=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}]\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

$\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}$ 为列向量,$[\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}]$非负,且在区间$[t_0,t_f]$连续(因为 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\boldsymbol{C}(t)$连续)。由引理 3.3.1 和引理 3.3.2 得

$$\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}=0 \tag{3.6.9}$$

注意到 $\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}$ 恰为系统(3.6.1)以 $\boldsymbol{h}$ 为初态的输出的自由响应。

与此同时,以零向量为初态的输出自由响应显然也为零。再者,两种情况下输入 $\boldsymbol{u}(t)$引起的输出的强迫响应都是

$$\boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s \tag{3.6.10}$$

这样,对任意 $t_f>t_0$,在$[t_0,t_f)$上由相同的 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{y}(t)$就得到了 $\boldsymbol{x}(t_0)$的两个不同的解 $\boldsymbol{x}(t_0)=0$ 和 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{h}\neq 0$,这样就无法唯一确定 $\boldsymbol{x}(t_0)$,与定义 3.6.1 的两条都不符合,因此系统在 t_0 时刻不能观测。证明完成。

定理3.6.1表明：在判断系统 t_0 时刻是否能观测的定性问题上，并不涉及输入矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 和输入 $\boldsymbol{u}(t)$；证明中的式(3.6.7)表明：若系统在 t_0 时刻能观测，则确定 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的定量问题要用到输入 $\boldsymbol{u}(t)$。

与时变控制系统的能控性Gram矩阵判据一样，能观测性Gram矩阵判据由于 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 和 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 难以求解，也主要用于理论分析。

观察时变控制系统的能控性判别矩阵(3.3.2)和能观测性判别矩阵(3.6.2)，二者在结构上具有某种对称性。这是对偶系统和对偶原理的反映。

两个时变控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

和

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)&=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{u}}(t)\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t)&=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{3.6.12}$$

称为是对偶系统。

系统(3.6.11)的运动是从时刻 t_0 向时刻 t 的转移；而系统(3.6.12)的运动是从时刻 t 向时刻 t_0 的转移。

记系统(3.6.11)和系统(3.6.12)的状态转移矩阵分别为 $\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)$，则 $\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(t_0,t)$。

若系统(3.6.11)和系统(3.6.12)简化为定常的，且传递函数矩阵分别为 $\boldsymbol{G}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_2(s)$，则 $\boldsymbol{G}_2(s)=-\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}(-s)$。

系统(3.6.11)的能控性等同于系统(3.6.12)的能观测性；系统(3.6.11)的能观测性等同于系统(3.6.12)的能控性。对照定常控制系统的各种能控与能观测判据，这一点将尤为明显。

对偶现象实际上广泛存在，如电路中的对偶现象；几何学中两点确定一条直线、两条直线确定(交于)一点；三点确定一个平面、三个平面确定(交于)一点等。

3.7 定常控制系统的能观测性

本节给出定常线性控制系统能观测性的定义和5种判据，与3.4节的定常系统的能控性判据是平行的。由于证明方法与能控性判据类似，本节不再详述。

考虑 n 阶定常线性控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\ \cdots\ \xi_n]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{3.7.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为控制输入向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为未知常数。

与针对能控性的讨论类似，定常线性系统的能观测性与时刻 t_0 的取值无关，因而只需关注未知状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$。

对于定常系统(3.7.1)有如下的能观测性定义：

定义3.7.1 对于 t_0 时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，

(1) 若存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$ 能够唯一确定各个 ξ_i，则

称未知状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是能观测的；

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的任意实际值，总存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t),t\in[t_0,t_f)$ 能够唯一确定各个 ξ_i，则称状态完全能观测，或称系统完全能观测，简称系统能观测。

定理 3.7.1　(Gram 矩阵判据)定常系统(3.7.1)能观测的充分必要条件是，存在 $t_L>0$，使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{W}(t_L)=\int_0^{t_L}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}]\mathrm{d}t \tag{3.7.2}$$

可逆。

对于定常系统，Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_L)$ 的可逆性取决于系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和输出矩阵 $\boldsymbol{C}$，形式上与 t_L 有关，但本质上只要 $t_L\neq 0$ 即可。

定理 3.7.2　(秩判据)定常系统(3.7.1)能观测的充分必要条件是，如下能观测性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_O(n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CA}^{n-1}\end{bmatrix} \tag{3.7.3}$$

列满秩，即 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_O(n)=n$，而 n 就是 $\boldsymbol{Q}_O(n)$ 的列数。

由定理 3.7.2 可以证明，状态的可逆变换不改变系统的能观测性。

对于多输出系统，能观测性判别矩阵(3.7.3)的行数多于列数 n。当系统(3.7.1)能观测时，称使得

$$\boldsymbol{Q}_O(\mu)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CA}^{\mu-1}\end{bmatrix} \tag{3.7.4}$$

列满秩的最小整数 μ 为系统的能观测性指数。对于能观测的 n 阶单输出系统，$\mu=n$。这一概念可用于多输入系统的分析和设计。

设系统(3.7.1)为 q 输出，$\mathrm{rank}\boldsymbol{C}=r\leqslant p$，类似于能控性指数，能观测性指数有估计式 $n/q\leqslant\mu\leqslant n+1-r$。

定理 3.7.3　(PBH 秩判据，振型判据)定常系统(3.7.1)能观测的充分必要条件是，对系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 λ，有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=n \tag{3.7.5}$$

定理 3.7.4　(PBH 特征向量判据)定常系统(3.7.1)能观测的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}$ 的任意特征向量 $\boldsymbol{h}$ 均满足 $\boldsymbol{Ch}\neq 0$。

Jordan 标准型判据举例：

【例 3.7.1】　考虑如下的系统矩阵为上三角 Jordan 型矩阵的 10 阶定常线性控制系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_{31}\\\dot{x}_{32}\\\dot{x}_{411}\\\dot{x}_{421}\\\dot{x}_{422}\\\dot{x}_{431}\\\dot{x}_{432}\\\dot{x}_{433}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&&&&&&&&&\\&a_2&&&&&&&&\\&&a_3&1&&&&&&\\&&&a_3&&&&&&\\&&&&a_4&&&&&\\&&&&&a_4&1&&&\\&&&&&&a_4&&&\\&&&&&&&a_4&1&0\\&&&&&&&&a_4&1\\&&&&&&&&&a_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_{31}\\x_{32}\\x_{411}\\x_{421}\\x_{422}\\x_{431}\\x_{432}\\x_{433}\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{c}_1\quad \boldsymbol{c}_2\quad \boldsymbol{c}_3\quad *\quad \boldsymbol{c}_{41}\quad \boldsymbol{c}_{42}\quad *\quad \boldsymbol{c}_{43}\quad *\quad *\,]\boldsymbol{x} \tag{3.7.6}$$

其中,特征值 a_1, a_2, a_3, a_4 两两互异;输出矩阵拆分为 10 个列向量。

针对系统矩阵的上三角形式,这里只需关注每个 Jordan 块第一列所对应的输出矩阵的列,例如,如输出矩阵的倒数第三列 $\boldsymbol{c}_{43}$ 需要列出,因为对应最后一个 3 阶 Jordan 块的第一列即系统矩阵的倒数第三列。* 表示的列不影响系统的能观测性。

根据 Jordan 标准型判据,系统(3.7.6)能观测的充分必要条件是,4 个向量组 $\{\boldsymbol{c}_1\}$、$\{\boldsymbol{c}_2\}$、$\{\boldsymbol{c}_3\}$、$\{\boldsymbol{c}_{41}, \boldsymbol{c}_{42}, \boldsymbol{c}_{43}\}$ 均为线性无关;或者说,$\boldsymbol{c}_1$、$\boldsymbol{c}_2$、$\boldsymbol{c}_3$ 均非零,且向量 $\boldsymbol{c}_{41}$、$\boldsymbol{c}_{42}$、$\boldsymbol{c}_{43}$ 线性无关。

进行判别时,输出矩阵中对应同一特征值的列归入同一组,不同的组之间没有联系。

与能控性时类似:系统能观测的必要条件之一,是输出维数不低于特征值的几何重数。几何重数影响能观测性,而代数重数未必。

【例 3.7.2】 考虑如下的系统矩阵为实 Jordan 型矩阵的 10 阶定常线性控制系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{111}\\\dot{x}_{112}\\\dot{x}_{113}\\\dot{x}_{114}\\\dot{x}_{121}\\\dot{x}_{122}\\\dot{x}_{21}\\\dot{x}_{22}\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1&\beta_1&1&0&&&&&&\\-\beta_1&\alpha_1&0&1&&&&&&\\&&\alpha_1&\beta_1&&&&&&\\&&-\beta_1&\alpha_1&&&&&&\\&&&&\alpha_1&\beta_1&&&&\\&&&&-\beta_1&\alpha_1&&&&\\&&&&&&\alpha_2&\beta_2&&\\&&&&&&-\beta_2&\alpha_2&&\\&&&&&&&&\alpha_3&\\&&&&&&&&&\alpha_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{111}\\x_{112}\\x_{113}\\x_{114}\\x_{121}\\x_{122}\\x_{21}\\x_{22}\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{c}_1\quad \boldsymbol{c}_2\quad *\quad *\quad \boldsymbol{c}_3\quad \boldsymbol{c}_4\quad \boldsymbol{c}_5\quad \boldsymbol{c}_6\quad \boldsymbol{c}_7\quad \boldsymbol{c}_8\,]\boldsymbol{x} \tag{3.7.7}$$

其中,系统矩阵为分块上三角结构,代表特征值的(α_1, β_1),(α_2, β_2),$(\alpha_3, 0)$,$(\alpha_4, 0)$两两互异,代表特征值虚部的 β_1, β_2 均不为零;输出矩阵拆分为 10 个列向量。

系统(3.7.7)完全能观测的充分必要条件是:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 & \boldsymbol{c}_4 \\ -\boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_1 & -\boldsymbol{c}_4 & \boldsymbol{c}_3 \end{bmatrix} = 4, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_5 & \boldsymbol{c}_6 \\ -\boldsymbol{c}_6 & \boldsymbol{c}_5 \end{bmatrix} = 2, \quad \boldsymbol{c}_7 \neq 0, \quad \boldsymbol{c}_8 \neq 0 \qquad (3.7.8)$$

式(3.7.8)中 $\boldsymbol{c}_i$ 的选取和分组原则与判别系统(3.7.6)时相同，这里是针对分块来进行。

以上5种判据的特点和应用场合与能控性判据类似，不再详述。

回顾3.1节的不完全能观测电路，只要式(3.1.2)不成立，系统就变为能观测，而现实中难以做到(3.1.2)精确成立，因此，实际系统几乎总是能观测的。在能观测与否的定性问题上，能观测性的概念主要是针对外部信号与被控对象构成的扩张被控对象或扩张状态的。选取哪些信号作为输出，直接关乎扩张被控对象的能观测性，也是系统设计的前提。

同时，3.1节的不完全能观测电路也说明，即便系统不能观测的几率不高，但有一个能观测程度的问题：式(3.1.2)越接近成立，能观测程度就越低。可以用能观测性判别矩阵 $\boldsymbol{Q}_O(n)$ 或 $\boldsymbol{Q}_O(\mu)$ 的最小和最大奇异值的比值 $\sigma_1(\boldsymbol{Q}_O)/\sigma_n(\boldsymbol{Q}_O)$ 来量化衡量。比值越接近零，系统越接近于不能观测。

3.8 能观测性的时间顺序

能控问题是选取控制输入，把 t_0 时刻的已知状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 在之后的某个时刻 t_f 精确转移到指定的目标状态如原点，从时间角度看是“面向未来”的。能观测问题是 t_0 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 未知，要利用 t_0 到之后某个时刻 t_f 期间的输入和输出来确定 $\boldsymbol{x}(t_0)$，从时间角度看是“回首往事”，因为时刻 t_0 在已经发生的输入和输出之前。

确定过去时刻 t_0 的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，不能说没有意义；但不论从前馈控制还是反馈控制的角度讲，确定还未发生的、将来的状态显然更有意义，且意义重大。实际上，能观测性概念也可以做到“面向未来”，即确定还未发生的状态，见如下的能观测性定义。

定义 3.8.1　对于未来时刻 t_0 和这一时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，

(1) 若存在时刻 $t_f<t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$，$t\in[t_f,t_0)$ 能够唯一确定各个 ξ_i，则称 t_0 时刻的状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是能观测的；

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的任意实际值，总存在时刻 $t_f<t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$，$t\in[t_f,t_0)$ 能够唯一确定各个 ξ_i，则称在 t_0 时刻状态完全能观测，或称系统在 t_0 时刻完全能观测，简称系统在 t_0 时刻能观测。

初学者可能难以理解 $t_f<t_0$，原因在于认为 t_0 是“初始”时刻。根据2.1节的讨论，初始时刻是相对的，并不是一个绝对的、前无古人的时刻。

由高等数学知识，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$，即交换积分的上下限会导致积分值反号。根据这一结果，对于时变线性控制系统(3.6.1)，为了判别定义3.8.1所说的能观测性，只需在定理3.6.1的Gram矩阵定义中交换积分上下限 t_0 和 t_f，而这显然不会改变Gram矩阵的可逆性。

至此可以看出，能观测性定义3.8.1虽然在时间顺序上与定义3.6.1相反，但判别方法却完全一样。而前者，即定义3.8.1，恰为服务于应用的状态获取方法提供了必要的理论支撑，是能观测性概念的初衷。

定义3.8.1所说的能观测性，有时也被称为能检测性。同时，能检测性在自动控制中也有其他不同的含义。

3.9 能控标准型和能观测标准型

对于能控或者能观测的定常线性控制系统,可以根据能控性或能观测性判别矩阵构造一个可逆矩阵,再由这个矩阵构造状态的可逆变换,把系统的状态空间描述等价变换为能控或能观测系统所特有的标准形式,即通常所说的能控标准型或能观测标准型。这两种标准型可分别用于设计状态反馈和状态观测器。

另一方面,标准型在现代控制理论早期是系统分析和设计的重要工具。但由于获取标准型涉及系统参数矩阵的变换,因此,需要考虑和评估系统物理参数摄动与变换相叠加的效应。尤其对于高阶系统,变换可能会导致较为严重的计算可靠性问题。

不论能控标准型或能观测标准型,也不论单输入多输入或单输出多输出,都有第一标准型和第二标准型的区分。

本节重点讨论应用相对较多的、单输入系统的第二能控标准型和单输出系统的第二能观测标准型。

考虑 n 阶单输入能控系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{3.9.1}$$

定理 3.9.1 系统(3.9.1)可以通过状态的可逆变换$\bar{x}(t)=Px(t)$化为如下的能控标准型

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) &= \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{b}}u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{3.9.2}$$

证明:核心是找到变换矩阵 $\boldsymbol{P}$。根据线性控制系统状态可逆变换的知识,系统(3.9.1)和系统(3.9.2)中参数矩阵之间有关系式

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}, \quad \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}, \quad \bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{3.9.3}$$

这里要求 $\bar{\boldsymbol{A}}$,$\bar{\boldsymbol{b}}$ 为特定结构,$\bar{\boldsymbol{A}}$ 是伴侣矩阵。对输出矩阵 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 没有特别要求。

把变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 按照行进行剖分,即令

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \tag{3.9.4}$$

由 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P} \tag{3.9.5}$$

利用 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的结构计算得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{A} \end{bmatrix} \tag{3.9.6}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{p}_3 \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \tag{3.9.7}$$

联立式(3.9.5)～(3.9.7),得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{p}_3 &= \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^2 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{p}_n &= \boldsymbol{p}_{n-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^{n-1} \end{aligned} \tag{3.9.8}$$

代入式(3.9.4)得

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.9.9}$$

再由 $\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$,用 $\bar{\boldsymbol{b}}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的结构计算得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{3.9.10}$$

所以

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b} = 0, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = 0, \cdots, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} = 1 \tag{3.9.11}$$

由式(3.9.11)得

$$\boldsymbol{p}_1[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \tag{3.9.12}$$

因为系统(3.9.1)能控,所以其能控性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_C(n) = [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}] \tag{3.9.13}$$

的秩是 n,注意到该矩阵是方阵,所以可逆。于是有

$$\boldsymbol{p}_1 = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]^{-1} \tag{3.9.14}$$

根据矩阵和向量的乘法法则,$\boldsymbol{p}_1$ 就是矩阵 $\boldsymbol{Q}_C^{-1}(n)$的最后一行,与 $\boldsymbol{Q}_C^{-1}(n)$的其他各行无关。

把式(3.9.14)代入式(3.9.9),就得到变换矩阵 $\boldsymbol{P}$,进而通过式(3.9.3)计算得到 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 和伴侣矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一行。证明完成。

根据上述证明过程,把单输入系统(3.9.1)通过状态的可逆变换 $\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$ 化为形如式(3.9.2)的能控标准型,可参照以下步骤进行:

(1) 计算能控性判别矩阵 $\boldsymbol{Q}_C = [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]$。

(2) 计算 $\text{rank}\boldsymbol{Q}_C$。若 $\text{rank}\boldsymbol{Q}_C = n$,进行下一步;否则,不存在能控标准型,计算终止。

(3) 按照式(3.9.14)计算得 $\boldsymbol{p}_1$。

(4) 按照式(3.9.9)计算得变换矩阵 $\boldsymbol{P}$。

(5) 计算 $\boldsymbol{P}^{-1}$。

(6) 按照式(3.9.3)计算得 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 和伴侣矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一行。

在定理 3.9.1 中,把系统(3.9.1)化为能控标准型的变换矩阵 $\boldsymbol{P}$,也可按照以下方法构造:

$$\bar{\boldsymbol{P}} = [\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{b}]\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \bar{\boldsymbol{P}}^{-1} \tag{3.9.15}$$

相关证明可利用

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} = \bar{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{P}} \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{P}}, \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} \tag{3.9.16}$$

还要用到 Caley-Hamilton 定理。

与前一种方法相比,这里需要额外计算系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det(s\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{3.9.17}$$

但优点是可以直接得到伴侣矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一行。

初学者可能会有这样的观点:既然能控标准型中 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一行对应 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式系数,$\bar{\boldsymbol{b}}$ 仅由 0 和 1 组成,那么根据特征多项式(3.9.17)直接就得到系统(3.9.1)的能控标准型的状态方程,即只需计算 A 的特征多项式。这样处理的前提,是系统(3.9.1)必须能控。下面看两个反例。

【例 3.9.1】 设系统(3.9.1)中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_3$,按照秩判据,这样的系统对于任何列向量 $\boldsymbol{b}$ 都不能控。$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_3$ 的特征多项式为 $(s-1)^3=s^3-3s^2+3s-1$。根据上述思路得到

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{3.9.18}$$

状态可逆变换前后的系统矩阵是相似的。根据线性代数知识,但单位矩阵只可能和自身相似,不可能相似于伴侣矩阵。

【例 3.9.2】 设系统(3.9.1)中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}_{3\times 3}$,按照秩判据,此时系统对于任何列向量 $\boldsymbol{b}$ 都不能控。但由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}_{3\times 3}$ 的特征多项式 s^3 根据上述思路却得到

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{3.9.19}$$

而零矩阵也不可能相似于 3 阶 Jordan,即式(3.9.19)中的伴侣矩阵。

考虑 n 阶单输出能观测系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \tag{3.9.20}$$

定理 3.9.2 系统(3.9.20)可以通过状态的可逆变换 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 化为如下的能观

测标准型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t)$$
$$=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & & & -a_1\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)=[0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1]\bar{\boldsymbol{x}}(t) \tag{3.9.21}$$

证明：利用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}$ 来构造变换矩阵 $\boldsymbol{T}$。系统(3.9.20)和系统(3.9.21)中参数矩阵满足关系式

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},\quad \bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b},\quad \bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{t} \tag{3.9.22}$$

这里要求 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 是伴侣矩阵的转置，对输入矩阵 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 没有特别要求。

把待定的变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 进行列剖分，即令

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1\ \ \boldsymbol{T}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{T}_n] \tag{3.9.23}$$

由 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{A}} \tag{3.9.24}$$

利用 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的结构计算得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}_1\ \ \boldsymbol{T}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{T}_n]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_n] \tag{3.9.25}$$

$$\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{T}_1\ \ \boldsymbol{T}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{T}_n]\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & & & -a_1\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$
$$=[\boldsymbol{T}_2\ \ \boldsymbol{T}_3\ \ \cdots\ \ *] \tag{3.9.26}$$

联立式(3.9.24)～(3.9.26)，得

$$\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}_1,\cdots,\boldsymbol{T}_n=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}_1 \tag{3.9.27}$$

代入式(3.9.23)得

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}_1] \tag{3.9.28}$$

再由 $\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}$ 得，用 $\bar{\boldsymbol{c}}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的结构计算得

$$[0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1]=\boldsymbol{c}[\boldsymbol{T}_1\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}_1] \tag{3.9.29}$$

所以

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_1=0,\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1=0,\cdots,\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}_1=1 \tag{3.9.30}$$

由式(3.9.30)得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} \tag{3.9.31}$$

因为系统(3.9.2)能观测，所以其能观测性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_O(n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{bmatrix} \tag{3.9.32}$$

的秩是 n,同时该矩阵是方阵,所以可逆。于是有

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} \tag{3.9.33}$$

所以 $\boldsymbol{T}_1$ 就是 $\boldsymbol{Q}_O(n)$阵的最后一列。

把式(3.9.33)代入式(3.9.28),就得到变换矩阵 $\boldsymbol{T}$,进而通过式(3.9.22)计算得到$\bar{\boldsymbol{b}}$和 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一列。证明完成。

根据上述证明过程,把单输出系统(3.9.20)通过状态的可逆变换$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$化为形如(3.9.21)的能观测标准型,可参照以下步骤进行:

① 计算能控性判别矩阵 $\boldsymbol{Q}_O=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{cA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\end{bmatrix}$。

② 计算 rank$\boldsymbol{Q}_O$。若 rank$\boldsymbol{Q}_O=n$,进行下一步;否则,不存在能观测标准型,计算终止。

③ 按照式(3.9.33)计算得 $\boldsymbol{T}_1$。

④ 按照式(3.9.28)计算得变换矩阵 $\boldsymbol{T}$。

⑤ 计算 $\boldsymbol{T}^{-1}$。

⑥ 按照式(3.9.22)计算得$\bar{\boldsymbol{b}}$和 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一列。

在定理 3.9.2 中,把系统(3.9.20)化为能观测标准型的变换矩阵 $\boldsymbol{T}$,也可按照以下方法构造:

$$\bar{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}1 & a_{n-1} & \cdots & a_1\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & a_{n-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{cA}^{n-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{cA}\\ \boldsymbol{c}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}=\bar{\boldsymbol{T}}^{-1} \tag{3.9.34}$$

相关证明可利用

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\bar{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{T}}^{-1}\Leftrightarrow\bar{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{T}},\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{T}}^{-1}\Leftrightarrow\bar{\boldsymbol{c}}\bar{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{c} \tag{3.9.35}$$

以及 Caley-Hamilton 定理完成。

类似于能控标准型的情形,这里需要额外计算系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0 \tag{3.9.36}$$

3.10 传递函数矩阵与能控能观测

根据第 1 章的相关内容,由系统的状态空间描述可以得到系统的传递函数矩阵。那么同样作为系统的模型表达,二者之间是否等价?系统的能控性和能观测性,与传递函数矩阵

由什么关联？这是本节要讨论的问题。

本节的核心概念是零极相消，即传递函数矩阵的零点和极点因重合而形成对消，而传递函数矩阵的零点，是指其分子矩阵各个元素的非常数公因式的根。

对系统进行状态的可逆变换，不会改变系统的传递函数，因而不会改变系统的零点和极点；同时，也不会改变系统的能控性和能观测性。因此这里基于系统矩阵为对角标准型和 Jordan 标准型进行讨论。

1. 单输入-单输出系统的零极相消

分 4 种情况进行讨论。

1) 在 $\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中的零极相消

考虑状态空间描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}(t)=[c_1 \quad \cdots \quad c_n]\boldsymbol{x}(t) \tag{3.10.1}$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 两两互异，即几何重数都是 1。根据 Jordan 标准型判据可知，该系统能控的充分必要条件是所有的 $b_1,\cdots,b_n$ 非零，能观测的充分必要条件是所有的 $c_1,\cdots,c_n$ 非零。

系统(3.10.1)对应的传递函数是

$$g(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{a_1b_1}{s-a_1}+\cdots+\frac{a_nb_n}{s-a_n} \tag{3.10.2}$$

如果 $g(s)$ 中有零极相消，比如极点 a_1 被零点对消，则 a_1 对应的分式 $a_1b_1/(s-a_1)$ 不会在 $g(s)$ 中出现，这等价于 $a_1b_1=0$，即 a_1 和 b_1 至少有一个为零。于是，系统(3.10.1)要么不能控，要么不能观测，或者既不能控，又不能观测。于是得出结论：系统既能控又能观测的充分必要条件是，传递函数中没有零极相消。

再考虑状态空间描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \\ & a_1 & 1 & \\ & & a_1 & \\ & & & a_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}(t)=[c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]\boldsymbol{x}(t) \tag{3.10.3}$$

其中 $a_1\neq a_2$，几何重数都是 1。根据 Jordan 标准型判据可知，该系统能控的充分必要条件是 $b_3\neq 0,b_4\neq 0$，能观测的充分必要条件是 $c_1\neq 0,c_4\neq 0$。

系统(3.10.3)对应的传递函数是

$$g(s)=\frac{b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3}{s-a_1}+\frac{b_3c_2+b_2c_3}{(s-a_1)^2}+\frac{b_3c_1}{(s-a_1)^3}+\frac{b_4c_4}{s-a_2} \tag{3.10.4}$$

没有零极相消的充分必要条件是 $b_3c_1\neq 0$ 和 $b_4c_4\neq 0$。因此，系统(3.10.3)既能控又能观测的充分必要条件，依然是其传递函数没有零极相消。

根据 Jordan 标准型判据，对于单输入-单输出系统，若特征值的几何重数大于 1，则系统既不能控又不能观测。因此，以上两个例子限制特征值的几何重数为 1。

若在 $\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中发生零极相消，则相当于对消的零点堵塞了输入到输出的某种对

应状态信息的传输通道,该零点称为输入-输出解耦零点,或传输零点,即使得

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} s_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & 0 \end{bmatrix} < n+1 \tag{3.10.5}$$

的 s_0。

2) 在预解矩阵 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 中的零极相消

由于

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})} \tag{3.10.6}$$

根据线性代数知识,若分子矩阵 $\mathrm{adj}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 的各个元素有非常数的公因式,则这个公因式必然也在特征多项式 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 中出现,从而发生对消。

设公因式完全对消后

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\boldsymbol{P}(s)}{\phi(s)} \tag{3.10.7}$$

其中 $\phi(s)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式,其次数小于等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的次数。次数相等时,最小多项式就是特征多项式。

若 $\phi(s)$ 的次数小于特征多项式的次数,则等价于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有几何重数大于1的特征值出现,即一个特征值对应多个 Jordan 块。这种情况下,根据 Jordan 标准型判据,单输入-单输出系统必然既不能控又不能观测。

3) 在 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中的零极相消

函数矩阵 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 表示从输入到状态向量的传递函数矩阵。能控性由系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和控制向量 $\boldsymbol{b}$ 决定。直观地看,$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中的零极相消会与能控性有关。

对于系统(3.10.1),有

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s-a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s-a_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{b_1}{s-a_1} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{s-a_n} \end{bmatrix} \tag{3.10.8}$$

系统(3.10.1)不能控的充分必要条件是某个 b_i。比如 b_1 为零,这样,在 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中就没有对应的项 $b_1/(s-a_1)$,即极点 a_1 被零点对消。

对于系统(3.10.3),有

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}b=\begin{bmatrix} \frac{b_1}{s-a_1}+\frac{b_2}{(s-a_1)^2}+\frac{b_3}{(s-a_1)^3} \\ \frac{b_2}{s-a_1}+\frac{b_3}{(s-a_1)^2} \\ \frac{b_3}{s-a_1} \\ \frac{b_4}{s-a_2} \end{bmatrix} \tag{3.10.9}$$

系统(3.10.3)不能控的充分必要条件是 $b_3=0$ 或 $b_4=0$。若 $b_3=0$,则在 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中就不会有 $b_3/(s-a_1)^3$ 项,这样,三重极点 a_1 被消去一重。若还有 $b_2=0$,则 a_1 被消去两重。

因此，单输入系统能控的充分必要条件是，在$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$中没有零极相消。

若在$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$中发生零极相消，则相当于对消的零点堵塞了输入到某种对应状态信息的传输通道，该零点称为输入解耦零点，即使得

$$\operatorname{rank}[s_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]<n \tag{3.10.10}$$

的s_0。

4) 在$\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$中的零极相消

函数矩阵$\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$是从初始状态到输出的传递函数矩阵。与 3)的情形相对偶，可得以下结论：单输出系统能观测的充分必要条件是，在$\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$中没有零极相消。

若在$\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$中发生零极相消，则相当于对消的零点堵塞了与之对应的状态信息传向输出的通道，该零点称为输出解耦零点，即使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}s_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{c}\end{bmatrix}<n \tag{3.10.11}$$

的s_0。

传输零点、输入解耦零点和输出解耦零点的概念及含义也适用于多输入-多输出系统。

2. 多输入-多输出系统的零极相消

首先看一个例子。考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&4&2\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{3.10.12}$$

能控性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_C=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}0&1&2&\\0&0&2&\cdots\\1&0&1&\end{bmatrix} \tag{3.10.13}$$

能观测性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_O=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&3&2\\&\vdots&\end{bmatrix} \tag{3.10.14}$$

因此该系统既能控又能观测。

再看传递函数矩阵。

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(s-1)^2(s-4) \tag{3.10.15}$$

$$\operatorname{adj}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}(s-1)(s-4)&3(s-1)&2(s-1)\\0&(s-1)^2&2(s-1)\\0&0&(s-1)(s-4)\end{bmatrix} \tag{3.10.16}$$

伴随矩阵各个元素有公因式$(s-1)$，且与特征多项式形成对消。

这个例子表明，即便存在零极相消，多输入-多输出系统仍可能既能控又能观测。

传递函数矩阵没有零极相消，是多输入-多输出系统既能控又能观测的充分但不必要

条件。必要性不成立的原因是,系统矩阵出现了几何重数大于1的特征值。若所有的特征值几何重数都是1,即每个特征值只对应一个Jordan块,则必要性成立,即判别准则和单输入-单输出系统完全一致。

传递函数矩阵的零极相消必然改变系统阶次。本节内容说明,同样作为描述系统的工具,传递函数矩阵相对于状态空间描述是有欠缺的。这一点,在下一节会看得更加明确。

3.11　线性定常控制系统的结构分解

根据系统能控性和能观测性的定义,系统不能控是指状态变量不完全能控,系统不能观测是指状态变量不完全能观测。实际上,只要系统有控制输入和可测输出,就一定存在某些能控的状态变量和能观测的状态变量。

本节以系统状态的可逆变换为工具,讨论把系统的状态变量按照能控与否、能观测与否进行分类,建立能控子系统和不能控子系统、能观测子系统和不能观测子系统。这样处理的一个直接结果,是清晰表明了能控能观测与传递函数矩阵的关系。为了简化叙述,这里仅对定常情形进行讨论。

1. 能控性结构分解

考虑不能控的多输入-多输出n阶控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{3.11.1}$$

能控性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_C = [\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \tag{3.11.2}$$

则必有$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_C=n_1<n$。在$\boldsymbol{Q}_C$的各个列向量中选取一个极大无关组,或与这个无关组等价的任意一个向量组$\{\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_{n_1}\}$,在此基础上添加$n-n_1$个向量$\boldsymbol{q}_{n_1+1},\cdots,\boldsymbol{q}_n$,构成$n$维向量空间的一组基底。记

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_{n_1},\boldsymbol{q}_{n_1+1},\cdots,\boldsymbol{q}_n],\quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{-1} \tag{3.11.3}$$

引入状态的可逆变换$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$,则可得到

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t)\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \bar{\boldsymbol{A}}_{12}\\ 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= [\bar{\boldsymbol{C}}_1\quad \bar{\boldsymbol{C}}_2]\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.11.4}$$

或

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t) = \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_{12}\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u}(t) \tag{3.11.5}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t) = \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\bar{\boldsymbol{x}}_2(t) \tag{3.11.6}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \bar{\boldsymbol{C}}_1\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)+\bar{\boldsymbol{C}}_2\bar{\boldsymbol{x}}_2(t) \tag{3.11.7}$$

其中,

$$\operatorname{rank}[\bar{\boldsymbol{B}}_1\quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{B}}_1\quad \cdots\quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}^{n_1-1}\bar{\boldsymbol{B}}_1] = n_1 \tag{3.11.8}$$

$\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)$是$n_1$维的完全能控的子状态向量,$\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$是$n-n_1$维的完全不能控的子状态向量。证明要用到$\boldsymbol{P}$的行剖分、$\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_n$以及Caley-Hamilton定理,这里从略。

对于分解式(3.11.4)或式(3.11.5)～(3.11.7),有以下几点解读：

(1) 根据式(3.11.8),容易理解子系统

$$\dot{\bar{x}}_1(t)=\bar{A}_{11}\bar{x}_1(t)+\bar{B}_1 u(t) \tag{3.11.9}$$

是能控的,或说$\bar{x}_1(t)$完全能控；但为什么增加 $\bar{A}_{12}\bar{x}_2(t)$后的子系统(3.11.5)也能控呢?

回顾定理 3.3.1 中 $u(t)$的构造。子系统(3.11.5)的状态向量为$\bar{x}_1(t)$,$\bar{A}_{12}\bar{x}_2(t)$是该系统的一个输入,且引起的响应

$$\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t,s)\bar{A}_{12}\bar{x}_2(s)\mathrm{d}s \tag{3.11.10}$$

是固定的向量。只要在构造 $u(t)$时把式(3.11.10)和初态 $x(t_0)$一起考虑,并不会影响 $u(t)$的存在性。

(2) 式(3.11.6)表明,$u(t)$既不能直接影响$\dot{\bar{x}}_2(t)$(因为被式(3.11.4)中输入矩阵的零块阻断),也不能通过影响$\bar{x}_1(t)$来间接影响$\dot{\bar{x}}_2(t)$(因为被式(3.11.4)中系统矩阵的零块阻断),因而$\bar{x}_2(t)$成为完全不能控的子状态。

这里面蕴含了这样一个基本思路：一个状态变量 $x_i(t)$之所以能控,有两种情况：一种是其变化率$\dot{x}_i(t)$受到 $u(t)$的直接影响,另一种是$\dot{x}_i(t)$受到另一个能控状态变量 $x_j(t)$的直接影响,或者说,$\dot{x}_i(t)$受到 $u(t)$的间接影响。

式(3.11.4)中参数矩阵的两个零块,正是结构分解所要得到的。

(3) 基于式(3.11.4)计算传递函数矩阵：

$$\begin{aligned}
&[\bar{C}_1\quad \bar{C}_2]\left\{sE_n-\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ 0\end{bmatrix}\\
&=[\bar{C}_1\quad \bar{C}_2]\begin{bmatrix}sE_{n_1}-\bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12}\\ 0 & sE_{n-n_1}-\bar{A}_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ 0\end{bmatrix}\\
&=[\bar{C}_1\quad \bar{C}_2]\begin{bmatrix}(sE_{n_1}-\bar{A}_{11})^{-1} & *\\ 0 & (sE_{n-n_1}-\bar{A}_{22})^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ 0\end{bmatrix}\\
&=\bar{C}_1(sE_{n_1}-\bar{A}_{11})^{-1}\bar{B}_1
\end{aligned} \tag{3.11.11}$$

所以,整个系统的传递函数矩阵也就是能控子系统中输入 $u(t)$到输出 $y_1(t)$的传递函数矩阵,与不能控子系统(3.11.6)毫无关系。这说明,传递函数矩阵无法反映系统中不能控的部分。

2. 能观测性结构分解

考虑不能观测的多输入-多输出 n 阶控制系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)&=Cx(t)\end{aligned} \tag{3.11.12}$$

能控性判别矩阵

$$Q_O=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix} \tag{3.11.13}$$

则必有 $\mathrm{rank}Q_O=n_1<n$。在 Q_O 的各个行向量中选取一个极大无关组,或与这个无关组等价

的任意一个向量组$\{\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_{n_1}\}$,在此基础上添加 $n-n_1$ 个向量 $\boldsymbol{h}_{n_1+1},\cdots,\boldsymbol{h}_n$,构成 n 维向量空间的一组基底。记

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{h}_{n_1}\\ \boldsymbol{h}_{n_1+1}\\ \boldsymbol{h}_n\end{bmatrix} \tag{3.11.14}$$

引入状态的可逆变换$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t)$,则可得到

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t)\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{11} & 0\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} & \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1\\ \bar{\boldsymbol{B}}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=[\bar{\boldsymbol{C}}_1\quad 0]\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix} \tag{3.11.15}$$

或

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t)&=\bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=\bar{\boldsymbol{C}}_1\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\end{aligned} \tag{3.11.16}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t)=\bar{\boldsymbol{A}}_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_{22}\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{u}(t) \tag{3.11.17}$$

其中,

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_O=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_1\\ \bar{\boldsymbol{C}}_1\bar{\boldsymbol{A}}_{11}\\ \vdots\\ \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{A}}_{11}^{n-1}\end{bmatrix}=n_1 \tag{3.11.18}$$

$\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)$是 n_1 维的完全能观测的子状态向量,$\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$是 $n-n_1$ 维的完全不能观测的子状态向量。证明从略。

对于分解式(3.11.15)或式(3.11.16)、式(3.11.17),有以下几点解读:

(1) 根据式(3.11.18),子系统(3.11.16)是能观测的。

(2) 式(3.11.17)表明,$\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$既不直接出现在输出 $\boldsymbol{y}(t)$中(因为被式(3.11.15)中输出矩阵的零块阻断),也不能通过影响$\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)$来间接出现在输出 $\boldsymbol{y}(t)$中(因为被式(3.11.15)中系统矩阵的零块阻断),因而$\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$成为完全不能观测的子状态。

一个状态变量 $\boldsymbol{x}_i(t)$之所以能观测,有两种情况:一种是其本身为输出变量,另一种是 $\boldsymbol{x}_i(t)$直接或间接影响了某个输出变量的变化率,或者说,“隐身于”输出变量之中。

式(3.11.15)中参数矩阵的两个零块,正是结构分解的目标。

(3) 基于式(3.11.15)计算传递函数矩阵:

$$\begin{aligned}&[\bar{\boldsymbol{C}}_1\quad \bar{\boldsymbol{C}}_2]\left\{s\boldsymbol{E}_n-\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{11} & 0\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} & \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1\\ \bar{\boldsymbol{B}}_2\end{bmatrix}\\ &=[\bar{\boldsymbol{C}}_1\quad 0]\begin{bmatrix}s\boldsymbol{E}_{n_1}-\bar{\boldsymbol{A}}_{11} & 0\\ -\bar{\boldsymbol{A}}_{21} & s\boldsymbol{E}_{n-n_1}-\bar{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= [\bar{\boldsymbol{C}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{C}}_2] \begin{bmatrix} (s\boldsymbol{E}_{n_1} - \bar{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1} & 0 \\ * & (s\boldsymbol{E}_{n-n_1} - \bar{\boldsymbol{A}}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \bar{\boldsymbol{C}}_1 (s\boldsymbol{E}_{n_1} - \bar{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \tag{3.11.19}$$

所以，整个系统的传递函数矩阵也就是能观测子系统中输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 到输出 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}_1(t)$ 的传递函数矩阵，与不能观测子系统(3.11.17)无关。这说明，传递函数矩阵无法反映系统中不能观测的部分。

3. 能控性-能观测性结构分解

考虑不能控且不能观测的多输入-多输出 n 阶控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{3.11.20}$$

对该系统先按照能控性分解的方法，得到形如式(3.11.4)的状态空间描述；再对能控子系统和不能控子系统分别进行能观测性分解，可得 Kalman 分解，即如下形式的状态空间描述：

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t) \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t) \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_3(t) \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_{11} & 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{13} & 0 \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} & \bar{\boldsymbol{A}}_{22} & \bar{\boldsymbol{A}}_{23} & \bar{\boldsymbol{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{43} & \bar{\boldsymbol{A}}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t) \\ \bar{\boldsymbol{x}}_3(t) \\ \bar{\boldsymbol{x}}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = [\bar{\boldsymbol{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\boldsymbol{C}}_3 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_1(t) \\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t) \\ \bar{\boldsymbol{x}}_3(t) \\ \bar{\boldsymbol{x}}_4(t) \end{bmatrix} \tag{3.11.21}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)$ 能控且能观测，$\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$ 能控但不能观测，$\bar{\boldsymbol{x}}_3(t)$ 不能控但能观测，$\bar{\boldsymbol{x}}_4(t)$ 不能控且不能观测。

在式(3.11.21)中，系统矩阵左下角有 4 个零块，通常仅仅被认为是能控性分解的结果，是 $\bar{\boldsymbol{x}}_3(t)$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}_4(t)$ 不能控的原因之一。这种认识并不完整。实际上，位于 3 行 2 列的零块，也是 $\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$ 不能观测的原因之一！能控和能观测在系统结构中的耦合关系意味深长。

基于式(3.11.21)计算传递函数矩阵：

$$[\bar{\boldsymbol{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\boldsymbol{C}}_3 \quad 0] \left\{ s\boldsymbol{E}_n - \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_{11} & 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{13} & 0 \\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} & \bar{\boldsymbol{A}}_{22} & \bar{\boldsymbol{A}}_{23} & \bar{\boldsymbol{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_{43} & \bar{\boldsymbol{A}}_{44} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{C}}_1 (s\boldsymbol{E}_{n_1} - \bar{\boldsymbol{A}}_{11})^{-1} \bar{\boldsymbol{B}}_1 \tag{3.11.22}$$

式(3.11.22)表明，整个系统的传递函数矩阵也就是能控且能观测子系统中输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 到输出 $y_1(t)$ 的传递函数矩阵，与其他不能控或不能观测的子系统无关。

通过本节的讨论可以看出，传递函数矩阵一般说来是对控制系统的一种不完整的描述，不能控或不能观测担忧客观存在的状态变量(代表的动力学特性)，传递函数矩阵是无法描述的，这是它相较于状态空间描述的不足之处。

本章小结

本章对能控和能观测的各种概念进行了全面深入的剖析,给出了多种判别方法。

能控和能观测是针对系统状态而言的。因此,理论上说,能控和能观测的核心在于状态转移矩阵和 Gram 矩阵。

从应用的角度来说,相对较为实用的判别方法,是秩判据和 PBH 振型判据。

应用对偶原理能够简化能控和能观测判据的记忆。

能控和能观测结构分解可以看作是对 Jordan 标准型判据的扩展;从计算复杂度的角度说,前者作为分析能控能观测的依据更有优势,因为后者相较于前者,需要计算特征值。

系统极点的几何重数对于能控和能观测有重要影响,尤其在通过传递函数(矩阵)零极相消判断能控和能观测时,几何重数是潜在的决定因素。

习题 3

3.1 判断下列系统是否能控

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & -4 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\0 & 20 & 21\\0 & 25 & 20\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

(3) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 1\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\\0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

(4) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 3\\0 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

3.2 求使得下列系统能控的参数取值范围

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}a & 2\\-1 & 4\\b & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & a\\b & c\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

3.3 判断下列系统的能观测性

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\2 & 3 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}=[2\quad 3\quad -4]\boldsymbol{x}$

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-1&0&3\\1&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(3) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-1&4&5\\-2&1&5\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\3&1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

3.4 求使得下列系统能观测的参数取值范围

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}a&b\\c&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}=[2\quad 1]\boldsymbol{x}$

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-1&a&b\\1&-2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

3.5 求使得下列系统同时能控能观测的参数取值范围

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&-1&a\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{y}=[0\quad 0\quad 1]\boldsymbol{x}$

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\-1\\a\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{y}=[b\quad 1\quad -2]\boldsymbol{x}$

3.6 计算下列系统的能控指数和能观测指数

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&-1&9\\0&2&1\\3&0&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2&0\\3&1\\-1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-1&0&5\\1&2&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&3&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2&1\\0&3\\-1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

3.7 证明 3.3 节中对定理 3.3.1 的说明(1)。

3.8 判断下列系统的能控性

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&t\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u},t\geqslant 0$

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\e^{-2t}\end{bmatrix}\boldsymbol{u},t\geqslant 0$

(3) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}, t\in[0,2]$

3.9　求解以下系统的能控、能观测标准型和对应的变换矩阵

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{y}=[1 \quad 1 \quad 0]\boldsymbol{x}$

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{y}=[2 \quad 1]\boldsymbol{x}$

3.10　对于能控的单输入定常控制系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}$,设计状态的可逆变换$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$,其中$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]^{-1}$。求解变换后的状态方程。

3.11　建立如下系统的能控和能观测子系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=[0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]\boldsymbol{x}, \quad a\neq b$$

3.12　设对单变量n阶定常系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$ 成立 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=0,\cdots,\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}=0$。判断系统的能控性和能观测性,并计算系统的传递函数。

3.13　设对单变量n阶定常系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$ 能控。是否存在输出向量$\boldsymbol{c}$,使得系统总是能观测的?

第 4 章

系统运动的稳定性

稳定性是系统继能控能观测之外的另一个重要属性。对系统运动即状态响应或输出响应的稳定性分析师系统与控制理论不可或缺的组成要件。稳定性往往是对实际系统的基本要求，不稳定的系统一般不能付诸应用。

通常，可用两种方式来定义系统的稳定性：一种是在零初态条件下由输入-输出关系描述的外部稳定性，另一种是由系统的零输入响应、即初态引起的自由响应描述的内部稳定性。只有在满足一定条件时，二者才是等价的。

本章重点讨论内部稳定性，特别是在系统分析和设计中应用非常广泛的 Lyaponov 稳定性理论，主要包括基本概念、稳定性定义和稳定性判别方法。

理解稳定性理论要牢牢把握时间和空间两个维度；稳定性概念是针对系统的信号提出的，但稳定与否的判据，最终都是基于系统的结构和参数。因此，和学习能控能观测类似，要注意体会系统结构决定系统功能的基本思想；稳定性判别的计算复杂度也是需要体会的一个要点。事实上，对于高阶次多变量系统，分析和设计的核心目标之一就是尽可能低的计算复杂度。

4.1 外部稳定性和内部稳定性

本节就线性定常系统讨论外部稳定性和内部稳定性。

4.1.1 外部稳定性

考虑一个具有零初始条件的单输入-单输出的线性定常系统。如果对于一个有界的输入 $u(t)$，即满足条件

$$|u(t)| \leqslant k_1, \quad t \in [t_0, \infty) \tag{4.1.1}$$

的输入 $u(t)$，所产生的输出 $y(t)$也是有界的，即

$$|y(t)| \leqslant k_2, \quad t \in [t_0, \infty) \tag{4.1.2}$$

则称该系统是外部稳定的，或有界输入-有界输出稳定的，简称为 BIBO(Bounded Input-Bounded Output)稳定，其中 k_1 和 k_2 是常数。

对于多输入-多输出的情形，式(4.1.1)和式(4.1.2)变为各个输入或输出分量都有界，概念含义不变。

设线性定常系统的传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)=[g_{ij}(s)]$为严格真，则系统为 BIBO 稳定的充分必要条件是，每个元素 $g_{ij}(s)$的极点都具有负实部。

4.1.2 内部稳定性

内部稳定性是指在系统外部输入恒为零的前提下，由系统非零初态引起的状态响应随着时间的推移趋向于零，即以零为极限。

对于线性定常系统，可根据图纸多项式的系数由 Routh 判据或 Hurwitz 判据来判别内

部稳定性。

4.1.3 外部稳定性和内部稳定性的关系

对于线性定常系统,若其为内部稳定,则必为外部稳定;反之,由于传递函数矩阵只能表示系统能控且能观测的子系统,一般情况下显然无法判断整个系统状态的运动趋向;进一步地,若系统既能控又能观测,则内部稳定和外部稳定等价。

4.2 Lyapunov 稳定性理论的基本概念

就系统描述而言,Lyapunov 稳定性理论的研究对象选取为没有外部输入的自治系统。原因如下:

从理论层面讲,第一,自治系统本身的确存在有关稳定性的讨论;第二,某些系统与反馈控制构成的闭环系统,从形式上看也是自治系统,因而存在稳定性问题。

从应用层面讲,由于设定值(参考信号)的客观存在,加之可能出现的干扰输入,前馈和(或)反馈与被控对象构成的扩张系统几乎都是非自治的。但任何非自治系统,当从形式上忽略外部输入时,就得到一个自治系统。这个自治系统的结构和参数已经涵盖了控制律的结构和参数,从根本上决定了稳定性以及系统的其他一些性能。因而,稳定性的研究对象形式上还是自治系统。

就信号而言,Lyapunov 稳定性理论的研究对象是系统状态的受扰运动,即系统状态的自由响应或者说零输入响应。这里的“受扰”是指系统的状态由于某种原因而偏离“理想”值。稳定性研究中关注状态偏离的程度、时刻以及能否回归“理想”值,不涉及“受扰”的原因。

考虑 n 阶自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), t], \quad \boldsymbol{x}(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty) \tag{4.2.1}$$

其中

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{4.2.2}$$

是 n 维状态向量,

$$\boldsymbol{f} = \begin{Bmatrix} f_1[x_1(t), t] \\ \vdots \\ f_n[x_n(t), t] \end{Bmatrix} \tag{4.2.3}$$

是 n 维函数向量。对于这个系统,稳定性就是要研究由非“理想”值的初态 $\boldsymbol{x}(t_0)=x_0$ 引起的系统响应 $\boldsymbol{x}(t)$,$t\in[t_0,\infty)$随着时间推移回归还是远离“理想”值。

就系统结构而言,Lyapunov 稳定性理论的研究对象是平衡点,即前面所说的状态的“理想”值。定义如下:

定义 4.2.1 对于系统(4.2.1),如果有常数 $x_{e1},\cdots,x_{en}$满足方程组

$$\begin{cases} f_1[x_{e1}, t] = 0 \\ \quad\quad \vdots \\ f_n[x_{en}, t] = 0 \end{cases}, \quad t \in [t_0, \infty) \tag{4.2.4}$$

则称 n 维常值向量

$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} x_{e1} \\ \vdots \\ x_{en} \end{bmatrix} \tag{4.2.5}$$

为系统(4.2.1)的一个平衡状态(equilibrium state)或平衡点(equilibrium point)。

平衡点的含义如下：设在某一时刻 t_1 系统的状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 精确到达平衡点，即 $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}_e$。根据方程组(4.2.4)，在时刻 t_1 就有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t_1) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1[x_{e1},t] \\ \vdots \\ f_n[x_{en},t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [t_1,\infty) \tag{4.2.6}$$

即全体状态变量的变化率都为零。这样，从 t_1 时刻开始，总有

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{e1} \\ \vdots \\ x_{en} \end{bmatrix}, \quad t \in [t_1,\infty) \tag{4.2.7}$$

即状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 不再离开平衡点 $\boldsymbol{x}_e$。

动力学系统的平衡点可以是一个、多个或无穷个。若平衡点 $\boldsymbol{x}_e \neq 0$，则总可以进行状态的坐标平移 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e$，这样平移后新系统的平衡点就是状态空间的原点 0。因此，以后总是假设原点 0 为系统的平衡点。

平衡点虽然形式上是常值状态，代表多个常值信号，但其各个分量作为方程组(4.2.4)的解，显然是由系统(4.2.1)的结构和参数决定的。因此，平衡点是系统的一种结构特征。

稳定性研究系统的自由响应是否回归平衡点，但是否回归实际上由平衡点所代表的系统的结构和参数来决定，自由响应是表象，平衡点是本质。

为了衡量系统状态偏离平衡点的程度，需要引入向量范数的概念。这里范数可以理解为向量的长度，当然，可以有不同的长度规则即范数规则。例如，对于向量 $\boldsymbol{a}=[a_1 \quad a_2 \quad a_3]^{\mathrm{T}}$ 来说，通常用 $\|\boldsymbol{a}\|$ 表示其范数。

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{4.2.8}$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = |a_1|+|a_2|+|a_3| \tag{4.2.9}$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|\} \tag{4.2.10}$$

都是可供选取的范数。在判断稳定与否的定性问题上，不同的范数规则没有区别。本章选取如式(4.2.8)所示的向量范数。

如果在平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 的一个足够小距离内没有其他的平衡点，则称 $\boldsymbol{x}_e$ 为孤立平衡点。若系统只有一个孤立平衡点，有时也把平衡点的稳定性说成是系统的稳定性。下面就系统(4.2.1)的孤立平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 给出 Lyapunov 稳定性理论的几个关键概念。

定义 4.2.2　孤立平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 为 Lyapunov 意义下的稳定的，是指初始时刻状态偏离的足够小，可以保证全体时刻状态偏离的任意小。亦即，对任意(小)的正数 ε，存在正数 $\delta(t_0,\varepsilon)$，使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{x}_e\| \leqslant \delta(t_0,\varepsilon) \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [t_0,\infty) \tag{4.2.11}$$

其中符号 $\delta(t_0,\varepsilon)$ 的含义是 δ(可能)与时刻 t_0 和指定的 ε 有关。

回顾函数在一点连续的概念。若把 $\| \boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{x}_e \|$ 看作自变量,把 $t\in[t_0,\infty)$ 时的 $\| \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e \|$ 看作函数值,则 Lyapunov 意义下的稳定意味着该函数在 0 点是连续的,或者说,$\| \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e \|$ 连续地依赖于 $\| \boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{x}_e \|$。

按照这个定义,有 $\delta(t_0,\varepsilon)\leqslant\varepsilon$。如果各个状态变量对于任意非零初态都是等幅振荡的,则平衡点是 Lyapunov 意义下稳定的。

对于这个定义,一个常见的误区是认为 Lyapunov 意义下的稳定就是不发散,即不无限远离平衡点。事实上,Lyapunov 意义下的稳定的确是不发散,但不发散却未必满足 Lyapunov 意义下的稳定的定义。

【例 4.2.1】 考虑如图 4.2.1 所示的平面系统。自单位圆中非原点出发的状态轨迹,总是穿出单位圆进而到达包含单位圆的一条封闭曲线 C,然后又离开 C、再次进入单位圆并无限接近原点。

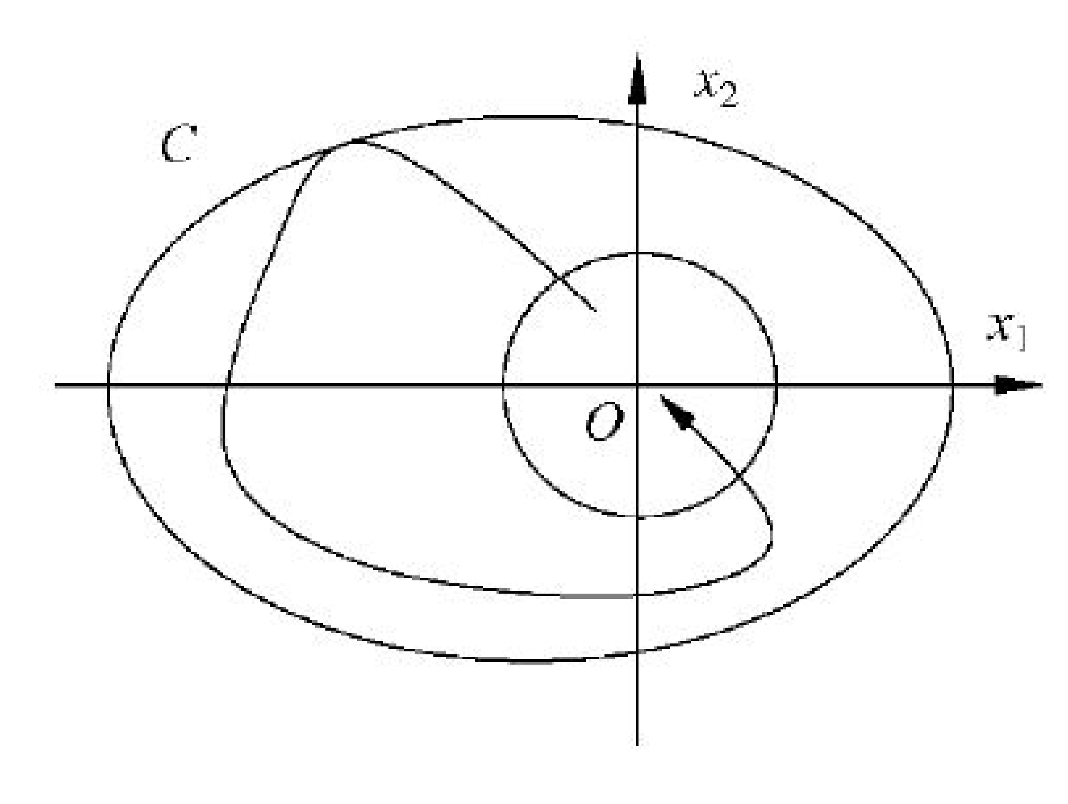


图 4.2.1 不发散、收敛但不稳定

由于整个状态轨线始终在封闭曲线 C 的内部,所以系统状态不发散;另一方面,不论初始偏离多么小,状态轨迹都要到达单位圆,甚至圆外曲线 C,显然做不到定义中要求的"任意小"。所以,按照定义,这个不发散的系统并不是 Lyapunov 意义下稳定的。

那么,Lyapunov 意义下的稳定相比于"不发散",价值何在呢?核心在于系统信号的取值范围问题。在例 4.2.1 中,状态变量在曲线 C 上的取值对于实际系统可能是不可承受的、导致实际系统崩溃的。所以说,Lyapunov 意义下的稳定为实践提供了理论准备,不纯粹是理论上的概念。

定义 4.2.3 孤立平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 为渐近稳定的,是指:

(1) $\boldsymbol{x}_e$ 为 Lyapunov 意义下稳定的,即满足式(4.2.11);

(2) 初始时刻状态偏离的足够小、时间推移足够久,可以保证以后时刻状态偏离的任意小。亦即,对任意(小)的正数 μ,存在两个正数 $c(t_0,\mu)$ 和 $T(t_0,c,\mu)$,使得

$$\| \boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{x}_e \| \leqslant c(t_0,\mu),t > T(t_0,c,\mu) \Rightarrow \| \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e \| \leqslant \mu \tag{4.2.12}$$

注意,满足式(4.2.12)的 $\boldsymbol{x}(t)$ 是从 t_0 时刻出发的。

按照式(4.2.12),存在 $d(t_0)$,使得

$$\| \boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{x}_e \| \leqslant d(t_0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_e \tag{4.2.13}$$

渐近稳定的这两条要求是独立的:第一条显然无法保证第二条所蕴含的关于时间 t 的极限行为;在例 4.2.1 中,取 $c(t_0)$ 为单位圆半径 1,μ 为包含曲线 C 的某个圆的半径,可知第二条无法保证第一条。

对于渐近稳定,一个误区是认为只要式(4.2.13)成立就可以了。实际上,Lyapunov 意义下的稳定即式(4.2.11)提供了合理的过渡过程。离开这个过渡过程,纯粹的极限行为(4.2.13)显然无法适应实际需要。

定义 4.2.4 对于系统(4.2.1),

(1) 若稳定的定义实际上能够做到 $\delta(t_0,\varepsilon)$ 对初始时刻 t_0 的任意取值存在公共的 $\delta(\varepsilon)$,则称平衡点是一致稳定的。

注意,"公共"两个字很重要。

（2）若渐近稳定的定义实际上能够做到：

① 平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 一致稳定；

② 对初始时刻 t_0 的任意取值，存在公共的 $c(\mu)$ 和 $T(c,\mu)$ 满足式(4.2.12)，则称平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 是一致渐近稳定的。

显然，“一致”是针对初始时刻而言的，是个时间概念。对于一般的时变系统，一致性并不成立，但不排除某些时变系统的稳定性是一致的。对于定常系统，一致性自然成立。

定义 4.2.5　若以状态空间中平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 之外任意有限状态为初态的响应 $\boldsymbol{x}(t)$ 都是有界的，且

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_e \tag{4.2.14}$$

则称平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 是全局(global)渐近稳定的。

全局渐近稳定也称为大范围渐近稳定。与此相对应，定义 4.2.2 中的稳定性称为局部(local)渐近稳定。注意这里“近”的写法。

全局渐近稳定的前提，是系统只有一个平衡点。

“全局”和“局部”都是针对初始状态偏离程度而言的，是个空间概念。对于一般的非线性系统，全局性并不成立，但某些非线性系统的确具有全局性。对于线性系统，全局性自然成立。

对于定义 4.2.2，由条件 $\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{x}_e\|\leqslant d(t_0)$ 所确定的最大的初态允许区域（即发自该区域的状态轨迹最终都趋于平衡点 $\boldsymbol{x}_e$）称为 $\boldsymbol{x}_e$ 的吸引区（吸引域）。

吸引区对于应用而言非常重要，对吸引区进行尽可能准确的估计是非常有意义的。实际的吸引区的形状可能并不规则。但可以证明，在一定条件下，吸引区的边界由系统轨线形成。

稳定、渐近稳定、一致性和全局性这些概念交织在一起，可以衍生出多种关于稳定性的具体概念以及对应的判别方法。从应用角度来讲，一致性、渐近稳定和尽可能大的吸引区显然都更为重要。因此，局部一致渐近稳定和全局一致渐近稳定从概念和判别方法上都具有特别重要的意义。

函数定号性在 Lyapunov 稳定性理论中经常用到。设有定义在区域 D 上的多元函数 $V(x)=V(x_1,\cdots,x_n)$，其中区域 D 包含原点 $x=0$ 作为内点。设 D_1 是区域 D 的子集，且包含原点 $x=0$ 作为内点。

定义 4.2.6　若函数 $V(x)$ 在区域 D_1 上满足：

① $V(0)=0$；

② $V(x)>0, x\in D_1-\{0\}$，

则称 $V(x)$ 在区域 D_1 上正定，或 $V(x)$ 是区域 D_1 上的正定函数。

【例 4.2.2】　$V=(x_1^2+x_2^2)[1-(x_1^2+x_2^2)]$ 定义域是二维平面。若 D_1 取为包含原点的单位圆内部，显然 $V(x)$ 在区域 D_1 上正定。

定义 4.2.7　若函数 $V(x)$ 在区域 D_1 上满足：

① $V(0)=0$；

② $V(x)\geqslant 0, x\in D_1-\{0\}$ 且 $D_1-\{0\}$ 中确有 x_0 使得 $V(x_0)=0$。

则称 $V(x)$ 在区域 D_1 上半正定，或 $V(x)$ 是区域 D_1 上的半正定函数。

【例 4.2.3】　$V=(x_1-x_2)^2[1-(x_1^2+x_2^2)]$ 定义域也是二维平面。若 D_1 取为包含原点

的单位圆内部,显然 $V(x)$在区域 D_1 上半正定。

定义 4.2.8 若函数 $V(x)$在区域 D_1 上满足:

① 若 $V(x)$在区域 D_1 上正定,则称 $-V(x)$在区域 D_1 上负定;

② 若 $V(x)$在区域 D_1 上半正定,则称 $-V(x)$在区域 D_1 上半负定。

讨论函数定号性时,务必关注自变量所在区域。

定义 4.2.9 关于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式函数称为二次型。二次齐次是指多项式中没有二次之外的其他项。

一个关于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 n 元二次型总可以表示为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}p_{ij}x_1x_j \tag{4.2.15}$$

其中 p_{ij} 为系数,注意 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$。根据矩阵向量乘法法则,式(4.2.15)总可以进一步表示为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}/2 & \cdots & p_{1n}/2\\ p_{12}/2 & p_{22} & \cdots & p_{2n}/2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{1n}/2 & p_{2n}/2 & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \tag{4.2.16}$$

记

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}/2 & \cdots & p_{1n}/2\\ p_{12}/2 & p_{22} & \cdots & p_{2n}/2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{1n}/2 & p_{2n}/2 & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix} \tag{4.2.17}$$

则式(4.2.16)简记为

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{4.2.18}$$

于是

$$2f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} \tag{4.2.19}$$

即

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}}{2}\boldsymbol{x} \tag{4.2.20}$$

对任意方阵 $\boldsymbol{P}$,$(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})/2$ 总是对称的。这说明,用于表示二次型的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 总可以选为对称的。对称矩阵有很多好的性质,如特征值都是实数。

二次型函数的价值在于其作为函数的定号性,而二次型的定号性与表示它的对称矩阵的定号性是完全一致的。下面给出对称矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix} \tag{4.2.21}$$

的定号性判别方法。

定理 4.2.1 (Sylvester 判据)对于对称矩阵(4.2.21),

(1) $\boldsymbol{P}$ 为正定的充分必要条件是:矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个前向主子式

$$p_{11},\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.2.22}$$

都是正数；

(2) $\boldsymbol{P}$ 为半正定的充分必要条件是：矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的全部主子式非负。

注意，$\boldsymbol{P}$ 的 n 个前向主子式非负并不能保证 $\boldsymbol{P}$ 为半正定，如反例

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.2.23}$$

Sylvester 判据对于函数矩阵也适用。

二次型及矩阵的定号性，是 Lyapunov 稳定性理论的重要工具。

【例 4.2.4】 二次型函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2-x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+3x_1x_3+4x_2x_3 \tag{4.2.24}$$

按照式(4.2.16)～(4.2.17)，有

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1.5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1.5 & 2 & 3 \end{bmatrix}x \tag{4.2.25}$$

应用 Sylvester 判据，$1>0$，$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-2\ngtr 0$。由于出现了非正的前向主子式，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不是正定的，因此对应的二次型也不是正定的。

在本例中，变量 x_1,x_2,x_3 的顺序只是形式上的，实际上 3 个变量地位平等。根据这一点，x_1 和 x_2 其实可以交换位置。这样一来，$\boldsymbol{P}$ 的(2,2)元，即 -1 就会变为(1,1)元，从而可以更快地判别函数不是正定。

实际上，只要有任何一个主子式非正，包括作为一级主子式的对角元，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 就不会正定；前向主子式，也可以把顺序倒过来，变成“后向”主子式，功能不变。

4.3　Lyapunov 第二方法：直接方法

俄罗斯学者 Lyapunov 在 1892 年发表了“运动稳定性的一般问题”一文，首先建立了运动稳定性的一般理论。在这篇文献中，Lyapunov 把分析由常微方程组所描述的动力学系统的稳定性的方法归纳为本质不同的两种，分别称为第一方法和第二方法。其中，第二方法也称为直接法，由系统的状态方程构造一个类似于“能量”的函数，通过分析函数及其一阶导数(对时间)的定号性判别系统的稳定性。第二方法概念直观，物理含义清晰，在 1960 年前后被引入到系统与控制理论中后，很快得到了广泛的应用。

本节的核心内容是讨论如何用 Lyapunov 第二方法判别系统的局部一致渐近稳定和全局一致渐近稳定。

4.3.1　定常非线性系统的稳定性

考虑定常非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f[\boldsymbol{x}(t)],\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,\infty) \tag{4.3.1}$$

设原点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 是系统的一个孤立平衡点。

定理 4.3.1 对于定常系统(4.3.1),若存在一阶连续可导的多元函数

$$V[\boldsymbol{x}(t)]=V[x_1(t),\cdots,x_n(t)] \tag{4.3.2}$$

满足:

① $V(x)$在包含原点的区域 D_1 上正定;

② $\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]=\mathrm{d}V[\boldsymbol{x}(t)]/\mathrm{d}t$ 在包含原点的区域 D_2 上负定;或$\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]$在区域 D_2 上半负定,但不恒为零;

③ $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V[\boldsymbol{x}(t)]=\infty$;

则有以下结论:

(1) ①+②⇒原点局部渐近稳定;

(2) 若 $D_1=D_2=R^n$ 即全空间,则①+②+③⇒原点全局渐近稳定。

证明从略。

对于定理 4.3.1 有以下几点说明:

(1) 函数 $V(\boldsymbol{x})$形式上似乎与系统(4.3.1)无关,实际并非如此。根据复合函数求导法则,有

$$\begin{aligned}\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]&=\mathrm{d}V[\boldsymbol{x}(t)]/\mathrm{d}t\\&=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1(t)+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n(t)\\&=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\ \cdots\ \frac{\partial V}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)\end{bmatrix}\\&=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\ \cdots\ \frac{\partial V}{\partial x_n}\right]\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\&=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\ \cdots\ \frac{\partial V}{\partial x_n}\right]f[\boldsymbol{x}(t)]\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

因而$\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]$的定号性和系统(4.3.1)的结构、参数密切相关。这样一来,函数 $V(\boldsymbol{x})$的设计是不可能脱离系统(4.3.1)独自进行的。

(2) $\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]$在区域 D_2 上不恒为零,是相对于时间 t 而言的。

(3) $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V(\boldsymbol{x})=\infty$也称为径向无界,可用极限定义来证明。若函数 $V(\boldsymbol{x})$不显含时间 t,则这个极限的确认和 t 无关。

(4) 由于系统(4.3.1)是定常的,所得稳定性结论自然具有一致性。

(5) 定理给出的局部或全局渐近稳定条件都是充分条件。已知系统渐近稳定,判断是否存在函数 $V[x(t)]$满足 $V[x(t)]$正定、$\dot{V}[x(t)]$负定相关结论属于 Lyapunov 逆定理。

【例 4.3.1】 判断系统

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)-x_1(t)[x_1^2(t)+x_2^2(t)]$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)[x_1^2(t) + x_2^2(t)] \tag{4.3.4}$$

在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 的稳定性。

解：取 R^2 上的正定函数

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2(t) + x_2^2(t) \tag{4.3.5}$$

则 $V(\boldsymbol{x})$沿系统(4.3.4)轨迹对时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) \\ &= 2x_1(t)\{x_2(t) - x_1(t)[x_1^2(t) + x_2^2(t)]\} + \\ &\quad 2x_2(t)\{-x_1(t) - x_2(t)[x_1^2(t) + x_2^2(t)]\} \\ &= -2[x_1^2(t) + x_2^2(t)]^2\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

所以$\dot{V}(\boldsymbol{x})$是 R^2 上的负定函数。

另外，显然有

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} V(\boldsymbol{x}) = \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty}[x_1^2(t) + x_2^2(t)] = \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty}\|\boldsymbol{x}\|^2 = \infty \tag{4.3.7}$$

根据定理 4.3.1，$\boldsymbol{x}_e=0$ 全局渐近稳定。

【例 4.3.2】 判断系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_1(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 5x_2(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2) \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_3(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2)\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 的稳定性。

解：取 R^3 上的正定函数

$$V(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{4.3.9}$$

$V(\boldsymbol{x})$沿系统(4.3.8)轨迹对时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 4x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + 2x_3\dot{x}_3 \\ &= 2(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2)(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 1)\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

在椭球区域

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid 6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 1 < 0\} \tag{4.3.11}$$

内，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$负定。根据定理 4.3.1，$\boldsymbol{x}_e=0$ 局部一致渐近稳定。

注意，在本例中由于$\dot{V}(\boldsymbol{x})$的负定只是局部成立，因此就失去了检验径向无界的前提。

4.3.2　时变非线性系统的稳定性

考虑时变非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f[\boldsymbol{x}(t), t], \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \in [t_0, \infty) \tag{4.3.12}$$

设原点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 是系统的一个孤立平衡点。

定理 4.3.2　对于时变系统(4.3.12)，若存在一阶连续可导的多元函数

$$V[\boldsymbol{x}(t), t] = V[x_1(t), \cdots, x_n(t), t], \quad V[\boldsymbol{0}, t] = 0, \quad t \in [t_0, \infty) \tag{4.3.13}$$

和包含原点的区域 D_1 上的正定连续函数 $W_1[\boldsymbol{x}(t)]$、$W_2[\boldsymbol{x}(t)]$以及包含原点的区域 D_2 上的正定连续函数 $W_3[\boldsymbol{x}(t)]$，满足：

① 在区域 D_1 上有 $W_1[\boldsymbol{x}(t)] \leqslant V[\boldsymbol{x}(t), t] \leqslant W_2[\boldsymbol{x}(t)]$；

② 在区域 D_2 上有 $\dot{V}[\boldsymbol{x}(t),t]=\mathrm{d}V[\boldsymbol{x}(t),t]/\mathrm{d}t\leqslant -W_3[\boldsymbol{x}(t)]$；

③ $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} W_1[\boldsymbol{x}(t)]=\infty$；

则有以下结论：

(1) ①+②⇒原点局部一致渐近稳定；

(2) 若 $D_1=D_2=R^n$ 即全空间,则①+②+③⇒原点全局一致渐近稳定。

证明从略。

对于定理4.3.2有以下几点说明：

(1) 因为系统为时变的,为了得到一致渐近稳定的结论,要给函数 $V[\boldsymbol{x}(t),t]$ 及其导数 $\dot{V}[\boldsymbol{x}(t),t]$ 找到3个作为界的函数 $W_1[\boldsymbol{x}(t)]$、$W_2[\boldsymbol{x}(t)]$ 和 $W_3[\boldsymbol{x}(t)]$,注意这3个界函数都不显含时间 t。

(2) 对于时变系统(4.3.12),若能找到满足定理4.3.1中①和②的不显含时间 t 的 $V[\boldsymbol{x}(t)]$,则 $V[\boldsymbol{x}(t)]$ 和 $\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]$ 本身就是对应的界函数,无须另找。

【例4.3.3】 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-x_1-g(t)x_2\\ \dot{x}_2&=x_1-x_2\end{aligned}\tag{4.3.14}$$

在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 的稳定性。其中,$g(t)$ 可导,且满足

$$0\leqslant g(t)\leqslant k(\text{常数}),\quad \dot{g}(t)\leqslant g(t),t\geqslant 0\tag{4.3.15}$$

解：取函数

$$V(\boldsymbol{x},t)=x_1^2+[1+g(t)]x_2^2\tag{4.3.16}$$

由条件(4.3.15)得

$$x_1^2+x_2^2\leqslant V(\boldsymbol{x},t)\leqslant x_1^2+(1+k)x_2^2\tag{4.3.17}$$

由此得界函数

$$W_1(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2,\quad W_2(\boldsymbol{x})=x_1^2+(1+k)x_2^2\tag{4.3.18}$$

$V(\boldsymbol{x},t)$ 沿系统(4.3.14)轨迹对时间的导数为

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},t)=-2x_1^2+2x_1x_2-[2+2g(t)-\dot{g}(t)]x_2^2\tag{4.3.19}$$

结合条件(4.3.15)得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x},t)&\leqslant -2x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2\\ &=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ &=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$ 正定,于是得界函数 $W_3(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$。

易于验证 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} W_1(\boldsymbol{x})=\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty}\|\boldsymbol{x}\|^2=\infty$。

根据定理4.3.2,$\boldsymbol{x}_e=0$ 全局渐近稳定。

针对时变系统(4.3.12)的定理4.3.2有另一种等价表述：

定理4.3.3 对于时变系统(4.3.1),若存在一阶连续可导的多元函数

$$V[\boldsymbol{x}(t),t]=V[x_1(t),\cdots,x_n(t),t],\quad V[\boldsymbol{0},t]=0,\quad t\in[t_0,\infty)\tag{4.3.21}$$

和连续的单调增加函数 $\alpha(*)$、$\beta(*)$、$\gamma(*)$，$\alpha(0)=\beta(0)=\gamma(0)=0$ 以及包含原点的区域 D_1 和 D_2，满足：

① 在区域 $D_1-\{0\}$ 上有 $0<\alpha(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V[\boldsymbol{x}(t),t]\leqslant\beta(\|\boldsymbol{x}\|)$；

② 在区域 $D_2-\{0\}$ 上有 $\dot{V}[\boldsymbol{x}(t),t]=\mathrm{d}V[\boldsymbol{x}(t),t]/\mathrm{d}t\leqslant-\gamma(\|\boldsymbol{x}\|)<0$；

③ $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty}\alpha(\|\boldsymbol{x}\|)=\infty$；

则有以下结论：

(1) ①＋②⇒原点局部一致渐近稳定；

(2) 若 $D_1=D_2=R^n$ 即全空间，则①＋②＋③⇒原点全局一致渐近稳定。

证明从略。

4.3.3 解读第二方法

对于 Lyapunov 第二方法，从以下几个方面解读：

(1) 用正定函数 $V[\boldsymbol{x}(t),t]$ 定义状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的一种长度规则

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|_V=\sqrt{V(\boldsymbol{x},t)},\quad \text{或}\quad V(\boldsymbol{x},t)=\|\boldsymbol{x}(t)\|_V^2 \tag{4.3.22}$$

(2) 若 $\dot{V}[\boldsymbol{x}(t),t]$ 负定，或半负定但不恒为零，则函数 $V[\boldsymbol{x}(t),t]$ 关于自变量 t 严格单调减少，或个别时段维持恒值但必然重新严格单调减少。又因为 $V[\boldsymbol{0},t]=0$，所以 $t\to\infty$ 时必有 $V(\boldsymbol{x},t)\to 0$，即 $\|\boldsymbol{x}(t)\|_V\to 0$。

(3) 注意到函数 $V[\boldsymbol{x}(t),t]$ 关于 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 连续，而连续函数在有界闭集上有最大值和最小值。据此可证，对于向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的任一范数规则 $\|*\|_a$（例如 $\sqrt{x_1^2(t)+\cdots+x_n^2(t)}$），只要关于 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 连续，就一定存在常数 c_1,c_2,c_3,c_4 满足（嵌入不等式）

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_a\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_V\leqslant c_2\|\boldsymbol{x}\|_a,\quad c_3\|\boldsymbol{x}\|_V\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_a\leqslant c_4\|\boldsymbol{x}\|_V \tag{4.3.23}$$

所以

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|_V\to 0\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(t)\|_a\to 0\Rightarrow\boldsymbol{x}(t)\to 0 \tag{4.3.24}$$

因此，第二方法首先是巧妙利用了 $\|\boldsymbol{x}(t)\|_V$ 的单调衰减；其次，虽然 $\|\boldsymbol{x}(t)\|_V$ 不同于 $\|\boldsymbol{x}(t)\|_a$，但这种不同发生在过渡期间；$t\to\infty$ 时的极限行为，二者并无区别。而渐近稳定需要的正是这个极限行为！

(4) 一般说来，正定函数 $V[\boldsymbol{x}(t),t]$ 并非总能定义状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的一种长度。充分条件之一，是由 $V[\boldsymbol{x}(t),t]=$ 常数 c 确定的等高线（等势面）闭合，或说集合 $\{\boldsymbol{x}\mid V[\boldsymbol{x}(t),t]=c,c>0\}$ 有界。否则，等势面不闭合，就会出现离原点任意远的点代表的向量长度都是常数 c 的情况，显然不合理。

(5) $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty}V[\boldsymbol{x}(t),t]=\infty$，即径向无界，是保证集合 $\{\boldsymbol{x}\mid V[\boldsymbol{x}(t),t]=c,c>0\}$ 有界的一种充分条件。

(6) 在定理 4.3.1～定理 4.3.3 中，都有函数 V 在区域函数 D_1 上正定，同时函数 $\dot{V}$ 在区域函数 D_2 上负定。对此，一个常见的误区是：发自集合 $D=D_1\cap D_2$ 的状态轨迹最终都趋于零，即 $D=D_1\cap D_2$ 是吸引区，或者至少是吸引区的子集合。而实际上，不论 $D=D_1\cap D_2$ 是否为全空间，都有反例证明 $D=D_1\cap D_2$ 不属于吸引区！

【例4.3.4】 考虑平面系统

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \tag{4.3.25}$$

选取正定函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \tag{4.3.26}$$

计算得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -4\left[\frac{3x_1^2}{(1+x_1^2)^4} + \frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2}\right] \tag{4.3.27}$$

所以,在全空间 R^2 上,都有 V 正定,同时 $\dot{V}$ 负定。但并非发自 $R^2-\{0\}$ 的任意状态轨迹都趋于零。事实上,只有初态 x 满足

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 < 1 \tag{4.3.28}$$

时,对应的状态轨迹才趋于零。系统是局部渐近稳定,不是全局渐近稳定。

这是因为,等高线

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 = c \tag{4.3.29}$$

只有当 $c<1$ 时才是闭合的,这时 $V(\boldsymbol{x})$ 才能定义一个合理的向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度。

可以验证,本例中径向无界条件不成立,即 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V[\boldsymbol{x}(t)] \neq \infty$。实际上,这个极限不存在。

【例4.3.5】 考虑平面系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - (x_1+2x_2)(1-x_2^2) \tag{4.3.30}$$

选取正定函数

$$V(\boldsymbol{x}) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \tag{4.3.31}$$

计算得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2[(x_1+x_2)^2 + (x_1+2x_2)^2(1-x_2^2)] \tag{4.3.32}$$

所以,V 在全空间 $D_1=R^2$ 上正定,同时 $\dot{V}$ 在区域 $D_2=\{(x_1,x_2):|x_2|\leqslant 1\}$ 上负定。$D=D_1\cap D_2=D_2$。但并非发自 $D-\{0\}$ 的任意状态轨迹都趋于零。

原因在于,虽然式(4.3.31)导出的等高线 $V(\boldsymbol{x})=c$ 对于任意的正数 c 作为椭圆都闭合,但对于某些 c,等高线 $V(\boldsymbol{x})=c$ 可能会落在区域 $D-\{0\}$ 之外,因而不能保证 $\dot{V}$ 始终负定。

本例中,若取 $\bar{D}=D_2\cap\{(x_1,x_2):V(\boldsymbol{x})\leqslant 5\}$,则在此区域中 V 正定,$\dot{V}$ 负定,且等高线 $V(\boldsymbol{x})=c(c\leqslant 5)$ 闭合,所有发自 $\bar{D}-\{0\}$ 的状态轨迹都趋于零。

(7) 在定理4.3.1～定理4.3.3中,函数 V 在区域函数 D_1 上正定,同时函数 $\dot{V}$ 在区域函数 D_2 上负定。在此条件下,一定存在 $D=D_1\cap D_2$ 的一个包含原点的子集,发自该子集的状态轨迹最终都趋于零。所以定理4.3.1～定理4.3.3中的前两条,给出了判别渐近稳定

的充分条件，但只涉及定性问题，不能给出吸引域的信息，不能提供定量描述。

4.3.4 Krasovskii 定理

Lyapunov 第二方法并未给出构造函数 $V[\boldsymbol{x}(t)]$ 或 $V[\boldsymbol{x}(t),t]$ 的一般方法。对于定常非线性系统(4.3.1)，可以就地取材，尝试

$$V[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)] \tag{4.3.33}$$

的可行性。这就是 Krasovskii 定理的核心思想。对这样构造的函数 $V[\boldsymbol{x}(t)]$ 求关于时间 t 的导数，得

$$\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\dot{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{x}(t)]+\dot{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)] \tag{4.3.34}$$

先来计算右端第一项：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\dot{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{x}(t)]\\
&=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\begin{Bmatrix}\dot{f}_1[x(t)]\\ \vdots\\ \dot{f}_n[x(t)]\end{Bmatrix}=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dot{x}_1+\cdots+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\dot{x}_n\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\dot{x}_1+\cdots+\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\dot{x}_n\end{bmatrix}\\
&=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}f[x(t)]
\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

记

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}(t)]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix} \tag{4.3.36}$$

$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}(t)]$ 即为 Jacobi 矩阵。式(4.3.35)即

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\dot{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{f} \tag{4.3.37}$$

注意到式(4.3.34)中右端两项形式上互为转置，所以

$$\dot{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}(t)]\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} \tag{4.3.38}$$

于是有

$$\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{f} \tag{4.3.39}$$

因为原点是系统(4.3.1)的平衡点，所以 $\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=0$，因此 $\dot{V}(\boldsymbol{0})=0$；若进一步有函数矩阵 $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ 对任意 $\boldsymbol{x}(t)\neq 0$ 负定，则由矩阵负定的定义可知对任意 $\boldsymbol{x}(t)\neq 0$ 有 $\dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]<0$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=0$，$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ 对任意 $\boldsymbol{x}(t)\neq 0$ 负定 $\Rightarrow \dot{V}[\boldsymbol{x}(t)]$ 负定。

至此，依据定理 4.3.1 可得 Krasovskii 定理。

定理 4.3.4　对于定常非线性系统(4.3.1)，

(1) 若函数矩阵 $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ 对任意 $\boldsymbol{x}(t)\neq 0$ 为负定矩阵，$\boldsymbol{F}$ 如式(4.3.36)所示，则原点局部渐近稳定；

(2) 若进一步有 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V[\boldsymbol{x}(t)]=\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=\infty$，则原点全局渐近稳定。

【例 4.3.6】 判断系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -6x_1+2x_2\\ \dot{x}_2 &= 2x_1-6x_2-2x_2^3\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 的稳定性。

解：Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 2 & -6-6x_2^2\end{bmatrix} \tag{4.3.41}$$

由 Sylvester 判据可知

$$-(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}12 & -4\\ -4 & 12+12x_2^2\end{bmatrix} \tag{4.3.42}$$

在 R^2 上负定。同时，

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}=(-6x_1+2x_2)^2+(2x_1-6x_2-2x_2^3)^2 \tag{4.3.43}$$

当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时有 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\to\infty$。根据定理 4.3.4，$\boldsymbol{x}_e=0$ 全局渐近稳定。

Krasovskii 定理还有其他变形，如尝试 $V[\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}$ 的可行性，其中 $\boldsymbol{P}$ 为适当选取的常值正定矩阵。定理 4.3.4 相当于取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$。

4.4 线性系统的稳定性

考虑时变线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t),\quad t\in[t_0,\infty) \tag{4.4.1}$$

设原点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 是唯一的平衡点，$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=[\phi_{ij}(t,t_0)]$是状态转移矩阵。

定理 4.4.1 (状态转移矩阵判据)对于时变线性系统(4.4.1)，

(1) 平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 渐近稳定的充分必要条件是，存在常数 $k(t_0)$，使得对状态转移矩阵的每个元素都有 $|\phi_{ij}(t,t_0)|\leqslant k(t_0)$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi_{ij}(t,t_0)=0$；

(2) 平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 一致渐近稳定的充分必要条件是，存在不依赖于 t_0 的常数 k_1 和 k_2，使得 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 的每个元素都满足 $|\phi_{ij}(t,t_0)|\leqslant k_1\mathrm{e}^{-k_2(t-t_0)}$。

证明从略。

定理 4.4.2 (Lyapunov 判据)对于时变线性系统(4.4.1)，设 $\boldsymbol{A}(t)$的元素分段连续且一致有界。则平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 一致渐近稳定的充分必要条件是，对于任意给定的对称、一致有界和一致正定的矩阵 $\boldsymbol{Q}(t)$，Lyapunov 矩阵微分方程

$$-\dot{\boldsymbol{P}}(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)+\boldsymbol{Q}(t) \tag{4.4.2}$$

有唯一的对称、一致有界和一致正定的解矩阵 $\boldsymbol{P}(t)$。

在定理 4.4.2 中，矩阵 $\boldsymbol{Q}(t)$一致有界和一致正定是指，存在常数 a_1 和 a_2，使得

$$0<a_1\boldsymbol{E}\leqslant\boldsymbol{Q}(t)\leqslant a_2\boldsymbol{E},\quad t\in[t_0,\infty) \tag{4.4.3}$$

证明可由 Lyapunov 第二方法给出，从略。

时变线性系统的两个稳定性判据应用都各具难度，主要用于理论分析。

考虑时定常性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\quad t\in[0,\infty) \tag{4.4.4}$$

设原点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 是唯一的平衡点。

定理 4.4.3　(特征值判据)对于定常线性系统(4.4.1)，

(1) 平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 为 Lyapunov 稳定的充分必要条件是，系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值实部非正，且零实部特征值不属于 2 阶及以上的 Jordan 块；

(2) 平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 一致渐近稳定的充分必要条件是，系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值实部为负。

定理 4.4.4　(Lyapunov 判据)对于定常线性系统(4.4.1)，平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 渐近稳定的充分必要条件是，对任意对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，以下 Lyapunov 方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}=0 \tag{4.4.5}$$

有唯一对称、正定的解矩阵 $\boldsymbol{P}$。

证明：已知方程(4.4.5)有正定解 $\boldsymbol{P}$，往证 $\boldsymbol{x}_e=0$ 渐近稳定。取 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，则其导数

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x})&=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}\\&=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 正定，所以是负定函数。由定理 4.3.1 可知，$\boldsymbol{x}_e=0$ 渐近稳定。

已知 $\boldsymbol{x}_e=0$ 渐近稳定，往证解矩阵 $\boldsymbol{P}$ 存在、唯一且正定。考虑矩阵微分方程

$$\dot{X}(t)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}X(t)+X(t)\boldsymbol{A},\quad X(0)=\boldsymbol{Q},\quad t\geqslant 0 \tag{4.4.7}$$

可以验证

$$X(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{Q}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \tag{4.4.8}$$

是方程(4.4.7)的解。对式(4.4.8)两端进行积分：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\int_0^{\infty}X(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}X(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{A}=\int_0^{\infty}\dot{X}(t)\mathrm{d}t=X(\infty)-X(0) \tag{4.4.9}$$

因为 $\boldsymbol{x}_e=0$ 渐近稳定，作为时变系统的特例，有定理 4.4.1 可知，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 作为此时的状态转移矩阵满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=0$，结合式(4.4.8)得 $\lim\limits_{t\to\infty}X(t)=0$。又 $X(0)=\boldsymbol{Q}$，所以有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\int_0^{\infty}X(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}X(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}=0 \tag{4.4.10}$$

$X(t)$ 的唯一性和 $\lim\limits_{t\to\infty}X(t)=0$ 决定了无穷积分 $\int_0^{\infty}X(t)\mathrm{d}t$ 存在且唯一。取 $\boldsymbol{P}=\int_0^{\infty}X(t)\mathrm{d}t$，这就是方程(4.4.5)的解。

由 $\boldsymbol{P}$ 和 $X(t)$ 的定义可以直接验证得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{P}$ 对称。

矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 正定，因此有分解 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}$，且 $\boldsymbol{G}$ 可逆。对任意非零列向量 $\boldsymbol{h}$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{h}&=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}X(t)\boldsymbol{h}]\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{Q}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}h]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{h}]\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{G}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{h}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{G}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{h}]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

式(4.4.11)中，$\boldsymbol{G}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{h}$ 是非零列向量，被积函数为平方和，非负，且不恒为零，因此，$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{h}>0$。于是 $\boldsymbol{P}$ 正定。证明完成。

【例 4.4.1】 已知线性定常系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} \tag{4.4.12}$$

判断平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 是否为渐近稳定。

解:设对称矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix} \tag{4.4.13}$$

为建立形如式(4.4.5)的矩阵方程,首先计算

$$\boldsymbol{PA}=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a-b & 3a+b\\ 2b-c & 3b+c\end{bmatrix} \tag{4.4.14}$$

注意到 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{PA}$ 互为转置。取

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.4.15}$$

把 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{PA}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的表达代入式(4.4.5),得

$$\begin{bmatrix}4a-2b & 3a+3b-c\\ 3a+3b-c & 6b+2c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=0 \tag{4.4.16}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{PA}$ 互为转置,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}$ 必然是对称的。比较式(4.4.16)两端对应元素建立方程组的时候,只需考虑对角线及其右上方的元素:

$$\begin{aligned}4a-2b+1&=0\\ 3a+3b-c&=0\\ 6b+2c+1&=0\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

解得 $a=-\dfrac{7}{30},b=\dfrac{1}{30},c=-\dfrac{3}{5}$。于是

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-\dfrac{7}{30} & \dfrac{1}{30}\\ \dfrac{1}{30} & -\dfrac{3}{5}\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-7 & 1\\ 1 & -18\end{bmatrix} \tag{4.4.18}$$

由于 $-\dfrac{7}{30}<0$,所以 $\boldsymbol{P}$ 不正定,因此 $\boldsymbol{x}_e=0$ 不是渐近稳定的。

在上述计算过程中,由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{PA}$ 互为转置,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}$ 的对角元一定有公因数 2,如式(4.4.16)所示。针对这个现象,把正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 取为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的偶数倍,有可能简化计算。

若定常线性系统(4.4.4)的阶次为 n,则 Lyapunov 方程(4.4.5)中的待定对称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的自由变量个数是 $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2>n$。在例 4.4.3 中,判断稳定性还不如直接求解特征值简便。这种方法优势何在呢?相对于其他方法,如 Routh-Hurwitz 判据,又有什么特点呢?这个问题分为以下几个方面:

第一,对于 5 阶及高于 5 阶的系统,由于没有求根公式,一般不能直接手工计算求得特征值;

第二,求解特征值或利用 Routh-Hurwitz 判据都要首先计算特征多项式的系数;

第三,用 Lyapunov 方程(4.4.5)判别稳定性,形式上不受系统阶次限制。本质是求解

线性方程组，以及判断常数对称矩阵的定号性，后者本质上属于线性规划。实际上，即使变量众多，线性方程组和线性规划目前都有高效、可靠、完善的求解算法。把科学计算问题转化为线性方程组或者线性规划，其实正是各类研究者孜孜以求的目标。

作为线性方程，Lyapunov 方程(4.4.5)的解 $\boldsymbol{P}$ 有唯一、不存在和无穷多三种情况。后两种情况取决于 $\boldsymbol{A}$ 和正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的选取。

4.5　Lyapunov 第一方法：间接方法

利用 Lyapunov 第二方法判别稳定性，需要构造一个函数；对于线性定常系统，可以通过 Lyapunov 方程(4.4.5)来实现，但对于一般的非线性系统，并没有统一的构造方法。Krasovskii 定理显然也无法彻底解决函数构造问题。Lyapunov 第一方法可以在很大程度上弥补这一不足。

第一方法又称间接法，先要由系统的运动方程即状态方程建立其线性近似状态方程，再通过对线性状态方程的稳定性的分析间接给出原非线性系统局部稳定的有关信息。

考虑定常非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)], \quad t \in [t_0, \infty) \tag{4.5.1}$$

设原点 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 是系统的一个孤立平衡点。

设系统(4.5.1)的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}(t)] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4.5.2}$$

$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}(t)]$在平衡点 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 处赋值，即得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}(t)]\big|_{\boldsymbol{x}=0} \tag{4.5.3}$$

根据多元函数的 Maclaurin 展开式，有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + o(\boldsymbol{x}) \tag{4.5.4}$$

其中 $o(\boldsymbol{x})$表示相对于 $\boldsymbol{x}$ 各个分量的高阶无穷小。

式(4.5.4)中 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的线性近似。

定义 4.5.1　系统$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$称为系统(4.5.1)的线性化系统。

定理 4.5.1　(第一方法)对于定常非线性系统(4.5.1)和平衡点 $\boldsymbol{x}_e = 0$，

① 若$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$在 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 渐近稳定，则系统(4.5.1)在 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 渐近稳定；

② 若$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$在 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 发散，则系统(4.5.1)在 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 发散；

③ 若$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$在 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 等幅振荡，则系统(4.5.1)在 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 的稳定性要考虑 $o(\boldsymbol{x})$，需进一步确定。

之所以称 Lyapunov 第一方法为间接方法，是因为该方法借助于构造的线性化系统的稳定性来判断非线性系统的稳定性。与此相比，第二方法并没有构造新的系统，因此称为直接方法。第二方法虽然也构造一个函数，但仅是代数表达，相比于作为动力学系统的线性化系统而言，概念上复杂度要低。

第一方法的优点是，只要 Jacobi 矩阵存在，总可以着手进行判断；缺点是仅可能得到局

部渐近稳定的结论。

若$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$在$\boldsymbol{x}_e=0$渐近稳定,则结合 Lyapunov 方程,一定能够给出吸引域的估计值。

利用第一方法判断稳定性,首先要把非零平衡点平移到原点,其次求解 Jacobi 矩阵、建立线性化系统,进而利用以前讲过的定常线性系统的稳定性判据进行判别。

对于时变的非线性系统,也可以在平衡点建立其线性化系统,但一般说来线性化系统也是时变的,因而判别方法的复杂度较高,难以应用。

4.6 Lyapunov 方程的扩展应用:衰减上界和吸引区的估计

对于定常线性系统,Lyapunov 方程可以通过求解线性方程组构造第二方法需要的定号函数,进而判别平衡点或系统稳定性。除此之外,对于渐近稳定的定常线性系统,Lyapunov 方程可以用来进一步估计系统的衰减速率,即评估快速性;对于可用第一方法判别为局部渐近稳定的定常非线性系统,则可以进一步用 Lyapunov 方程来估计吸引区,得到吸引区的一个子集。

4.6.1 渐近稳定系统衰减率的估计

考虑n阶定常线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\quad t\in[0,\infty) \tag{4.6.1}$$

设原点$\boldsymbol{x}_e=0$是唯一的平衡点,且渐近稳定。因此,系统有任意非零初始状态$\boldsymbol{x}(0)$引起自由响应都将随着时间推移趋于原点。

直观理解,随着系统状态$\boldsymbol{x}(t)\rightarrow 0$,其对应的系统长度,或者说直接方法中的能量函数$V(\boldsymbol{x})$也趋于零。考虑到$V(\boldsymbol{x})$代表的能量尺度的相对性,单纯的$|\dot{V}(\boldsymbol{x})|$难以有效评估真实的衰减过程。

实际上,能量$V(\boldsymbol{x})$的平均取值越小、能量衰减速度$|\dot{V}(\boldsymbol{x})|$平均取值越大,则$\boldsymbol{x}(t)\rightarrow 0$的速度就越快。因此,可以引入

$$\eta=-\frac{\dot{V}(\boldsymbol{x})}{V(\boldsymbol{x})} \tag{4.6.2}$$

来表示系统的衰减快慢,η总体上越大,则衰减越快。

式(4.6.2)两端对时间进行积分:

$$\begin{aligned}\int_0^t \eta\mathrm{d}s&=-\int_0^t\frac{\dot{V}[\boldsymbol{x}(s)]}{V[\boldsymbol{x}(s)]}\mathrm{d}s=-\int_{x(0)}^{x(t)}\frac{1}{V[\boldsymbol{x}(s)]}\mathrm{d}V[\boldsymbol{x}(s)]\\&=\ln V[\boldsymbol{x}(0)]-\ln V[\boldsymbol{x}(t)]=\ln\frac{V[\boldsymbol{x}(0)]}{V[\boldsymbol{x}(t)]}\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

进而可得

$$V[\boldsymbol{x}(t)]=V[\boldsymbol{x}(0)]\mathrm{e}^{-\int_0^t\eta\mathrm{d}s} \tag{4.6.4}$$

若能得到常数

$$\eta_0=\min_{x(t)}\left[-\frac{\dot{V}(\boldsymbol{x})}{V(\boldsymbol{x})}\right] \tag{4.6.5}$$

代入式(4.6.4)可得

$$V[\boldsymbol{x}(t)] \leqslant V[\boldsymbol{x}(0)]\mathrm{e}^{-\int_0^t \eta_0 \mathrm{d}s} \leqslant V[\boldsymbol{x}(0)]\mathrm{e}^{-\eta_0 t} \tag{4.6.6}$$

于是就得到了 $V(\boldsymbol{x})$ 随时间衰减的指数函数上界。

对于定常的线性系统，$V(\boldsymbol{x})$ 是状态向量的二次型函数，确实可以得到 η_0 的估计值。为了表达和证明衰减上界 η_0，需要如下关于矩阵的两个结果。

引理 4.6.1　对于二次型函数 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$，有

$$\frac{\partial(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_n} \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} \tag{4.6.7}$$

引理 4.6.2　若方阵 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$ 对称，其中至少有一个例如 $\boldsymbol{G}$ 正定或半正定，则矩阵乘积 $\boldsymbol{GH}$ 或 $\boldsymbol{HG}$ 的特征值都是实数；若 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是对称正定的，则 $\boldsymbol{GH}$ 或 $\boldsymbol{HG}$ 的特征值都是正实数。

若 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=0$ 是系统(4.6.1)渐近稳定的平衡点，则对于任意给定的正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，Lyapunov 方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{Q} = 0 \tag{4.6.8}$$

有唯一对称、正定的解矩阵 $\boldsymbol{P}$。根据 Lyapunov 直接方法，此时

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \quad \dot{V} = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{4.6.9}$$

代入式(4.6.5)，得

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \min_{\boldsymbol{x}(t)}\left[-\frac{\dot{V}(\boldsymbol{x})}{V(\boldsymbol{x})}\right] \\ &= \min_{\boldsymbol{x}(t)}\left[\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)}\right] \\ &= \min_{\boldsymbol{x}(t)}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) = 1\} \end{aligned} \tag{4.6.10}$$

对于等式约束的最优化问题(4.6.10)应用 Lagrange 乘数法，引入 Lagrange 乘子 μ，构建辅助函数

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) - \mu[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) - 1] \tag{4.6.11}$$

式中乘子 μ 前的符号正负不影响最终结果。结合引理 4.6.1，驻点方程为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - 2\mu\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = 2(\boldsymbol{Q} - \mu\boldsymbol{P})\boldsymbol{x} = 0 \tag{4.6.12}$$

等价于

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q} - \mu\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = 0 \tag{4.6.13}$$

即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x} \tag{4.6.14}$$

注意到 $\boldsymbol{x}\neq 0$，所以，乘子 μ 就是矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$ 的特征值，而驻点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 是对应于 μ 的特征向量。$\boldsymbol{P}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 都是对称正定矩阵，根据引理 4.6.2，μ 是实数。

把驻点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 代入式(4.6.14)，得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_0 = \mu\boldsymbol{x}_0 \tag{4.6.15}$$

两端左乘 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 得

$$x_0^{\mathrm{T}} Q x_0 = \mu x_0^{\mathrm{T}} P x_0 = \mu \times 1 = \mu \tag{4.6.16}$$

所以,等式约束的最优化问题(4.6.10)的极值就是矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$ 的特征值 μ。注意到 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$ 有 n 的正实数特征值,所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$ 的最小特征值 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})$ 就是要求的最小值 η_0。

基于以上结果,结合式(4.6.9),有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)\mathrm{e}^{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})t} \tag{4.6.17}$$

读者或许会有这样的疑问:为了判断 n 阶系统的衰减上界,就要求解一个 n 阶矩阵的特征值,从计算复杂度的角度看这样的处理优势何在?问题的关键在于,矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$ 的特征值都是正的实数,因此,只需在实轴的正半轴而不是整个复平面上确定特征值。

为了计算 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})$,形式上要计算 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 和矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$ 的特征多项式。然而,由于

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}) \\ &= \det\boldsymbol{P}\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}) \\ &= \det[\boldsymbol{P}(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})] \\ &= \det(\lambda \boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}) \end{aligned} \tag{4.6.18}$$

这样就避免了计算 $\boldsymbol{P}^{-1}$。

一个简单的衰减上界 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})$,可以取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_n$,这样计算 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1})$ 就可以了。由于逆矩阵的特征值与原矩阵的特征值互为倒数,而 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1})$ 恰好就是 $\boldsymbol{P}$ 的最大特征值的倒数。

在此需要指出,这里求解的衰减上界是针对函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 的,即式(4.6.17),还不是系统状态变量 $\boldsymbol{x}(t)$ 自身的衰减上界。

用 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 分别代表最小和最大特征值。根据二次型函数的性质,有

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t) \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \leqslant \lambda_{\max}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{4.6.19}$$

所以

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t) \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0) \leqslant \lambda_{\max}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{x}(0) \tag{4.6.20}$$

结合式(4.6.17)可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t) &\leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)\mathrm{e}^{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})t} \\ &\leqslant \frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{x}(0)\mathrm{e}^{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})t} \end{aligned} \tag{4.6.21}$$

这是对状态向量的平方和

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_1^2(t) + \cdots + \boldsymbol{x}_n^2(t) \tag{4.6.22}$$

的衰减上界的一个估计。

再来看系统输出变量的衰减上界估计问题。设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t) = [c_1 \quad \cdots \quad c_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \end{aligned} \tag{4.6.23}$$

为系统(4.6.1)的一个输出变量。根据向量的 Cauchy 不等式,有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^2(t) &= [\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)]^2 \\
&\leqslant (c_1^2+\cdots+c_n^2)(x_1^2+\cdots+x_n^2) \\
&= \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
\tag{4.6.24}
$$

结合式(4.6.21)，得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^2(t) &\leqslant \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
&\leqslant \left[\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{e}^{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})t}
\end{aligned}
\tag{4.6.25}
$$

这就是输出变量 $\boldsymbol{y}(t)$的一个衰减上界估计。

4.6.2　吸引区的估计

考虑 n 阶定常非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)],\quad t\in[0,\infty) \tag{4.6.26}$$

设原点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=0$ 是系统的孤立平衡点。

根据 Lyapunov 第一方法即间接方法的相关内容，系统(4.6.26)可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t)] \tag{4.6.27}$$

其中，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}(t)]\big|_{\boldsymbol{x}=0} \tag{4.6.28}$$

为 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}(t)]$在平衡点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=0$ 处的取值，向量函数 $\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t)]$为状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$的高阶无穷小，即

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{\|\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t)]\|}{\|\boldsymbol{x}(t)\|} = 0 \tag{4.6.29}$$

其中

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 = x_1^2+\cdots+x_n^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{4.6.30}$$

式(4.6.29)表明，存在正的常数 k 和 δ，使得

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\| = k\|\boldsymbol{x}\|^{1+\delta} \tag{4.6.31}$$

设近似线性化系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{4.6.32}$$

在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=0$ 渐近稳定，则 Lyapunov 方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n = 0 \tag{4.6.33}$$

有唯一对称、正定的解矩阵 $\boldsymbol{P}$。与之相对应，

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\quad \dot{V} = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{4.6.34}$$

现在，尝试把正定函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{4.6.35}$$

由近似线性化系统(4.6.32)扩展应用到非线性系统(4.6.27)，关键的问题在于，$V(\boldsymbol{x})$沿着非线性系统(4.6.27)(而不是线性化系统(4.6.32)!)的轨迹的导数$\dot{V}(\boldsymbol{x})$能否在包含 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=0$ 的某个区域内负定，以及如何估计该区域的边界。这需要导数$\dot{V}(\boldsymbol{x})$的量化表达和进一步处理。

根据引理 4.6.1，结合系统(4.6.27)的状态方程和 Lyapunov 方程(4.6.33)，有

$$\dot{V}=\left[\frac{\partial(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right]^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}=(2\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$
$$=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]$$
$$=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$
$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$
$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$
$$=-\|\boldsymbol{x}\|^2+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$
$$\leqslant-\|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\| \tag{4.6.36}$$

结合式(4.6.31),有

$$\dot{V}=-\|\boldsymbol{x}\|^2+2k\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{x}\|^{2+\delta} \tag{4.6.37}$$

若取

$$r=\frac{1}{\sqrt[\delta]{2k\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})}}=[2k\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})]^{-\delta} \tag{4.6.38}$$

则

$$\|\boldsymbol{x}\|<r\Rightarrow\dot{V}(t)\text{ 负定} \tag{4.6.39}$$

同时,由于

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{4.6.40}$$

所以

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}<\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})r^2\Rightarrow\|\boldsymbol{x}\|<r \tag{4.6.41}$$

这样,在区域

$$\boldsymbol{G}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}<\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})r^2\} \tag{4.6.42}$$

上,$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 正定,$\dot{V}(\boldsymbol{x})$负定,等势面

$$\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=d,\quad 0<d<\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})r^2\} \tag{4.6.43}$$

作为超椭球面闭合。因此,发自 $G-\{0\}$的初始状态最终都要趋于零,G 就是吸引区的一个估计。

在式(4.6.36)中,

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(x)\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\| \tag{4.6.44}$$

的处理只是为了表达简便,针对具体问题,可能有保守性更小的处理方式,以期获得尽量大的 r 的估计值,从而得到更好的吸引域估计 G。

【例 4.6.1】 考虑系统

$$\dot{x}_1=-x_2$$
$$\dot{x}_2=x_1+(x_1^2-1)x_2 \tag{4.6.45}$$

在 $\boldsymbol{x}_e=0$ 的稳定性以及可能的吸引区的估计问题。

该系统的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1+2x_1x_2 & x_1^2-1\end{bmatrix} \tag{4.6.46}$$

近似线性化系统矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0})=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1+2x_1x_2 & x_1^2-1\end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{4.6.47}$$

代入 Lyapunov 方程(4.6.33),求得唯一解

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1.5 & -0.5\\ -0.5 & 1\end{bmatrix} \tag{4.6.48}$$

为正定矩阵,因此 $\boldsymbol{x}_e=0$ 渐近稳定。同时求得

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})=(5-\sqrt{5})/4 \tag{4.6.49}$$

为估计吸引区,设计正定函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$,该函数沿系统(4.6.45)的轨线的导数是

$$\begin{aligned}\dot{V}&=-(x_1^2+x_2^2)-(x_1^3x_2-2x_1^2x_2^2)\\ &\leqslant-(x_1^2+x_2^2)+|x_1||x_1x_2||x_1-2x_2|\end{aligned} \tag{4.6.50}$$

由于

$$|x_1|\leqslant\|\boldsymbol{x}\| \tag{4.6.51}$$

$$|x_1x_2|\leqslant|x_1||x_2|\leqslant\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2} \tag{4.6.52}$$

$$|x_1-2x_2|=[1\quad -2]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\leqslant\|[1\quad -2]\|\,\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{5}\,\|\boldsymbol{x}\| \tag{4.6.53}$$

所以有

$$\dot{V}\leqslant-\|\boldsymbol{x}\|^2+\frac{\sqrt{5}}{2}\|\boldsymbol{x}\|^4 \tag{4.6.54}$$

于是,

$$\|\boldsymbol{x}\|<r=2/\sqrt{5}\Rightarrow\dot{V}(t)\ \text{负定} \tag{4.6.55}$$

计算得

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})r^2=\frac{5-\sqrt{5}}{4}\,\frac{4}{5}=1-\frac{1}{\sqrt{5}} \tag{4.6.56}$$

至此,求得吸引区的一个估计

$$G=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}<1-1/\sqrt{5}\} \tag{4.6.57}$$

在本例中,关键的一环是式(4.6.50)～式(4.6.54)对$\dot{V}$上界的尽可能接近的估计,对应式(4.6.36)中对高阶无穷小项 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的处理。不同的技巧会导致最终吸引区估计的不同。

这里为了便于分析,在 Lyapunov 方程中取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_n$。实际上,这样的选取不一定是最优方案。

如果涉及数值计算,从方法的原理上看,式(4.6.56)中的 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})r^2$ 以及式(4.6.57)中的 $1-1/\sqrt{5}$不能按照通常的四舍五入来处理,而应当去尾。例如,对于 $1-1/\sqrt{5}=0.552786\cdots$,若要精确到小数点后 4 位,则应取 0.5527,而不是 0.5528。

注意,在利用 Lyapunov 方程估计吸引区的过程中,虽然有 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$,同线性情形一样,但由于是针对非线性系统的状态轨迹求导,所以$\dot{V}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 已经不再成立。因此,前述诸如 $\mathrm{e}^{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})t}$ 的函数不能用来估计非线性系统的衰减上界。

本节讨论的衰减上界和吸引区估计,原则上也可用于时变系统,但要找到 $V(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$ 的不显含时间的界函数。因此,类似的方法不具有一般性。

4.7　稳定性概念的扩展:指数稳定和有界性

回顾估计定常系统系统衰减上界的内容,得到的上界是借助于指数函数 $e^{-\eta_0 t}$ 来表示的,而指数函数的收敛或发散形态是为人们所熟知的。因此,把渐近稳定系统的收敛特性进一步描述为指数形式,是人们的自然期许。

考虑 n 阶时变非线性自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),t],\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,\infty) \tag{4.7.1}$$

设原点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 是系统的一个孤立平衡点。

定义 4.7.1　对于系统(4.7.1),

(1) 若存在正的常数 k、λ、c,使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\|\leqslant c\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant k\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{-\lambda t} \tag{4.7.2}$$

则称平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 局部指数稳定。

(2) 若对任意的初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$,总有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant k\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{-\lambda t} \tag{4.7.3}$$

则称平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 全局指数稳定。

按照这个定义,结合定常线性系统衰减上界的估计,可知渐近稳定的定常线性系统必为指数稳定,而且是全局指数稳定。

定理 4.7.1　对于系统(4.7.1),

(1) 若存在包含原点的区域 D,正的常数 k_1、k_2、k_3、α 以及函数 $V(\boldsymbol{x},t)$,使得

$$\boldsymbol{x}(t)\in D\Rightarrow\begin{cases}k_1\|\boldsymbol{x}\|^{\alpha}\leqslant V(\boldsymbol{x},t)\leqslant k_2\|\boldsymbol{x}\|^{\alpha}\\ \dot{V}(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{\partial V}{\partial t}+\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{x},t)\leqslant -k_3\|\boldsymbol{x}\|^{\alpha}\end{cases} \tag{4.7.4}$$

则 $\boldsymbol{x}_e=0$ 是局部指数稳定的。

(2) 若进一步有 $D=R^n$,则平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 是全局指数稳定。

实际上,在定理条件(4.7.4)下,存在足够小的常数 c,使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\|\leqslant c\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/\alpha}\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{-\frac{k_3}{k_2}\alpha(t-t_0)} \tag{4.7.5}$$

根据定理 4.7.1 给出的指数稳定判据,例 4.3.1～例 4.3.3 和定理 4.4.2 的情形都属于指数稳定。

对于不是渐近稳定的系统,若系统的状态响应在过渡过程和稳态过程阶段都能满足一定的有界要求,也完全可能满足应用需要。这就涉及有界性(boundedness)和最终有界性(也称毕竟有界性,ultimate boundedness)两个概念。

定义 4.7.2　对于系统(4.7.1),

(1) 若存在与 t_0 无关的正常数 c,$t_0\geqslant0$,对于每个 $\alpha\in(0,c)$,存在与 t_0 无关的 $\beta=\beta(\alpha)>0$,使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\|\leqslant\alpha\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\beta,\quad t\geqslant t_0 \tag{4.7.6}$$

则称系统的状态响应一致有界。

(2) 若式(4.7.6)对于任意大的 α 都成立，则称系统的状态响应全局一致有界。

(3) 若存在与 t_0 无关的正常数 $b, c, t_0 \geqslant 0$，存在与 t_0 无关的 $T = T(\alpha, b) \geqslant 0$，使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant b, \quad t \geqslant t_0 + T \tag{4.7.7}$$

则称系统的状态响应一致最终有界，且最终边界为 b。

(4) 若式(4.7.7)对于任意大的 α 都成立，则称系统的状态响应全局一致最终有界。

注意，有界性是针对系统状态响应的概念，不是平衡点。

定理 4.7.2　对于系统(4.7.1)，若存在正的常数 k_1、k_2、k_3、ε 以及函数 $V(x, t)$，使得

$$\begin{cases} k_1 \|\boldsymbol{x}\|^2 \leqslant V(\boldsymbol{x}, t) \leqslant k_2 \|\boldsymbol{x}\|^2 \\ \dot{V}(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}} f(\boldsymbol{x}, t) \leqslant -k_3 \|\boldsymbol{x}\|^2 + \varepsilon \end{cases} \tag{4.7.8}$$

则对于任意的初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \leqslant \frac{k_2}{k_1} \|\boldsymbol{x}(t_0)\|^2 \mathrm{e}^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} + \varepsilon \frac{k_2}{k_3} \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}\right] \tag{4.7.9}$$

证明：根据式(4.7.8)，有

$$\begin{aligned} -k_3 \|\boldsymbol{x}\|^2 + \varepsilon &\leqslant -\frac{k_3}{k_2} V(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon \\ &\leqslant -k_1 \frac{k_3}{k_2} \|\boldsymbol{x}(t)\|^2 + \varepsilon \end{aligned} \tag{4.7.10}$$

和

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}, t) &\leqslant -k_3 \|\boldsymbol{x}\|^2 + \varepsilon \\ &\leqslant -\frac{k_3}{k_2} V(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon \end{aligned} \tag{4.7.11}$$

两端同时乘以 $\mathrm{e}^{\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}$，得

$$\mathrm{e}^{\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} \dot{V}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{k_3}{k_2} \mathrm{e}^{\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} V(\boldsymbol{x}, t) \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} \tag{4.7.12}$$

上式左端恰为

$$\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} V(\boldsymbol{x}, t)\right] / \mathrm{d}t \tag{4.7.13}$$

因此，对式(4.7.12)两端积分，

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{\frac{k_3}{k_2}(s-t_0)} V(\boldsymbol{x}, s)\right] \leqslant \int_{t_0}^{t} \varepsilon \mathrm{e}^{\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} \mathrm{d}s \tag{4.7.14}$$

计算得

$$\mathrm{e}^{\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} V[\boldsymbol{x}(t), t] - V[\boldsymbol{x}(t_0), t_0] \leqslant \varepsilon \frac{k_2}{k_3} \left[\mathrm{e}^{\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} - 1\right] \tag{4.7.15}$$

两端同时乘以 $\mathrm{e}^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}$，得

$$V[\boldsymbol{x}(t), t] \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} V[\boldsymbol{x}(t_0), t_0] + \varepsilon \frac{k_2}{k_3} \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}\right] \tag{4.7.16}$$

由式(4.7.8)得

$$V[\boldsymbol{x}(t_0), t_0] \leqslant k_2 \|\boldsymbol{x}(t_0)\|^2, \quad \|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{k_1} V[\boldsymbol{x}(t), t] \tag{4.7.17}$$

代入式(4.7.16)，即得

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \leqslant \frac{k_2}{k_1}\|\boldsymbol{x}(t_0)\|^2 \mathrm{e}^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} + \varepsilon\frac{k_2}{k_3}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}\right] \tag{4.7.18}$$

证明完成。

该定理首先给出了任意 $t \geqslant t_0$ 时刻状态分量平方和的上界,即式(4.7.18);进而,在式(4.7.18)中令 $t \to \infty$,由于

$$\mathrm{e}^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} \to 0 \tag{4.7.19}$$

所以有

$$\|\boldsymbol{x}(\infty)\|^2 \leqslant \varepsilon\frac{k_2}{k_3} = d \tag{4.7.20}$$

即状态分量平方和的最终边界是常数 $\varepsilon\frac{k_2}{k_3}$。

在某些系统的控制律设计中,当外部干扰满足匹配条件(从控制通道进入系统)时,可以把 ε 作为控制律参数,使得闭环系统满足定理 4.7.2 的条件,从而得到式(4.7.20)的结果。令 ε 足够小,就能得到任意小的稳态误差。这种做法的一个不足之处,是状态轨迹往往在误差带边界 $\pm\sqrt{d}$ 之间频繁甚至高频振荡。

本章小结

本章的核心是 Lyapunov 稳定性的各种概念以及判别方法,包括稳定、渐近稳定、指数稳定、最终有界性、一致性、全局性、间接方法、直接方法、吸引区估计等。

间接方法和直接方法各有优缺点,吸引区的估计将二者相互融合,对于一般的非线性系统稳定性分析具有重要的理论意义和应用价值。

本章有两处容易因望文生义而出错:一是 Lyapunov 稳定不等于不发散,二是满足 Lyapunov 函数正定导数负定的区域未必为吸引区。这都是多数教材不曾强调的。

习题 4

4.1 判断下列二次型是否正定

(1) $V(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$

(2) $V(\boldsymbol{x}) = 8x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

(3) $V(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_2x_3$

(4) $V(\boldsymbol{x}) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$

(5) $V(\boldsymbol{x}) = x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3$

4.2 已知线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 250 & 0 & -5 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -25 & 5 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

(1) 判断平衡点 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 的稳定性;

(2) 判断系统是否为 BIBO 稳定。

4.3　已知系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2$$

(1) 求出系统全部平衡点；

(2) 求解各个平衡点的线性化状态方程，判断平衡点是否为渐近稳定。

4.4　判断系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2 x_2$$

在平衡点 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 是否为全局渐近稳定。

4.5　判断系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2$$

在平衡点 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 是否为全局渐近稳定。

4.6　已知线性时变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{t+1} & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \quad t \geqslant 0$$

取 $V(\boldsymbol{x}, t) = x_1^2 + (t+1)x_2^2$，判断平衡点 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 是否为全局渐近稳定。

4.7　已知线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

用 Lyapunov 方程证明：平衡点 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 渐近稳定的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| > 0$，$a_{11} + a_{22} < 0$。

4.8　用 Lyapunov 方程判断系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

平衡点 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 的稳定性。

4.9　设单输出系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$ 渐近稳定，$\boldsymbol{P}$ 是 Lyapunov 方程 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} = 0$ 的对称正定解。证明：$\int_0^{\infty} \boldsymbol{y}^2(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)$。

4.10　分别用 Lyapunov 第一和第二方法判别系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

在平衡点 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 的稳定性。

第 5 章

线性系统的反馈控制

综合是和分析相反的命题。在分析问题中，所面对的是已知的系统结构和参数及外输入作用，而有待研究的是系统运动的定性行为（如能控性、能观测性、稳定性等）和定量的变化规律。但在综合问题中，情况恰好相反，这里已知的是系统的结构和参数，以及所期望的系统运动形式或其某些特征，所要确定的则是需要施加于系统的外输入作用，即控制作用的规律。通常，这种所定出的控制系统规律常取为反馈的形式。无论在抗扰动或抗参数变动方面，反馈系统的性能都远优越于非反馈系统。

本章将以状态空间描述和状态空间方法为基础，直接在时间域内来讨论线性反馈系统的综合问题。并且将主要讨论在不同形式的性能指标下线性定常系统的反馈控制规律的综合方法。显然，对综合问题的整个研究，都是建立在系统分析的基础之上的，其中需要用到在系统的分析中所引入的许多概念及所引导出的相应的结果与方法。区别于本章中所讨论的时间域方法的另一类线性定常反馈系统的综合方法为复频率域综合方法，具体将在第 11 章中进行详细讨论。

5.1 状态反馈和输出反馈

1. 控制律的结构形式

考虑线性定常控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$是 p 维控制向量，$\boldsymbol{y}(t)$是 q 维输出向量。

形如

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \tag{5.1.2}$$

的控制律称为状态反馈，形如

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{v}(t) \tag{5.1.3}$$

的控制律称为（静态）输出反馈。

两式中$\boldsymbol{v}(t)$是新的控制输入，反映了控制律设计的阶段性；$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 是反馈增益矩阵，阶数分别是 $p\times n$ 和 $p\times q$，元素是否和时间 t 有关，决定了控制律作为系统，是时变的还是定常的。

对于输出反馈，结合输出方程，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t) &= -\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{v}(t) \\ &= -\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t)\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

所以，输出反馈是状态反馈的特例。

在设计状态反馈时，全部状态变量都是可供利用的；在设计输出反馈时，只有输出变量可供利用。注意到输出变量一般远少于状态变量，$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$是从 $\boldsymbol{x}(t)$到 $\boldsymbol{y}(t)$的不可逆变换，必然损失信息。所以，从系统信息的角度说，状态反馈要优于输出反馈。

把控制律(5.1.2)和(5.1.3)分别代入系统(5.1.1)，得闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

和

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BFC})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

显然，反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 都各自成了闭环系统矩阵的一部分，改变了原来的系统矩阵，或者说，反馈增益矩阵的元素作为控制参数，出现在闭环系统中，以改善系统性能。

注意到矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的元素多于矩阵 $\boldsymbol{F}$，而更多的控制参数有望获得更好的系统性能。这也可以说明，状态反馈在控制参数的个数或自由度上要优于输出反馈。

2. 闭环系统的传递函数矩阵

系统(5.1.1)的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}_{uy}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{5.1.7}$$

其中从控制向量到状态向量的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}_{ux}(s) = (s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{5.1.8}$$

图 5.1.1 为状态反馈的框图。子系统 $\boldsymbol{G}_{ux}(s)$的输出为状态向量 $\boldsymbol{x}$，而 $\boldsymbol{G}_1(s)$和常值矩阵 $\boldsymbol{K}$ 表示的子系统是反馈联结，因此，根据第 2 章子系统反馈联结时的传递函数矩阵表达，从输入 $\boldsymbol{v}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}_{vx}(s) = \boldsymbol{G}_1(s)[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}_1(s)]^{-1} \tag{5.1.9}$$

或

$$\boldsymbol{G}_{vx}(s) = [\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)]^{-1}\boldsymbol{G}_1(s) \tag{5.1.10}$$

结合系统的输出方程，就得到从输入 $\boldsymbol{v}$ 到输出 $\boldsymbol{y}$ 的闭环传递函数矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{vy}(s) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_{vx}(s)\\ &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_1(s)[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}_1(s)]^{-1}\\ &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]^{-1}\\ &= \boldsymbol{G}_{uy}(s)[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]^{-1}\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

或

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{vy}(s) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}_{vx}(s)\\ &= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_1(s)\boldsymbol{G}_2(s)]^{-1}\boldsymbol{G}_1(s)\\ &= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{E}+(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BK}]^{-1}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

式(5.1.11)形式上较为规整。

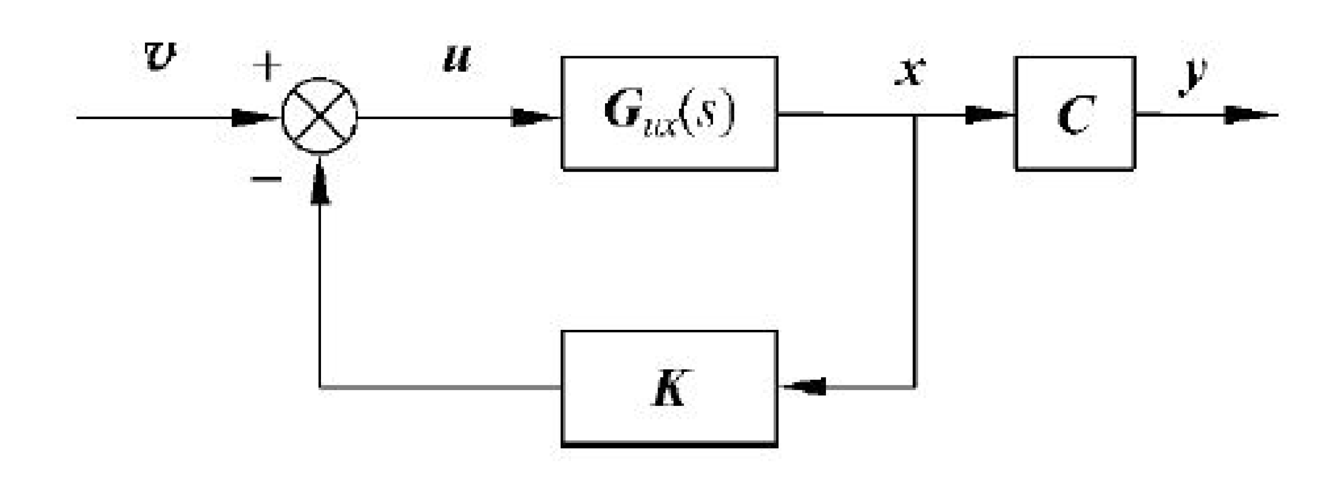


图 5.1.1　状态反馈

图5.1.2为输出反馈(5.1.3)的框图。子系统 $\boldsymbol{G}_{ux}(s)$ 和常值矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示的子系统经串联联结(传递函数矩阵为 $\boldsymbol{CG}_{ux}(s)$),再与常值矩阵 $\boldsymbol{F}$ 表示的子系统反馈联结。因此,闭环传递函数矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{vy}(s) &= \boldsymbol{CG}_1(s)[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{FCG}_1(s)]^{-1} \\ &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{FC}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]^{-1} \\ &= \boldsymbol{G}_{uy}(s)[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{FG}_{uy}(s)]^{-1}\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

或

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{vy}(s) &= [\boldsymbol{E}+\boldsymbol{CG}_1(s)\boldsymbol{F}]^{-1}\boldsymbol{CG}_1(s) \\ &= [\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BF}]^{-1}\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \\ &= [\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}_{uy}(s)\boldsymbol{F}]^{-1}\boldsymbol{G}_{uy}(s)\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

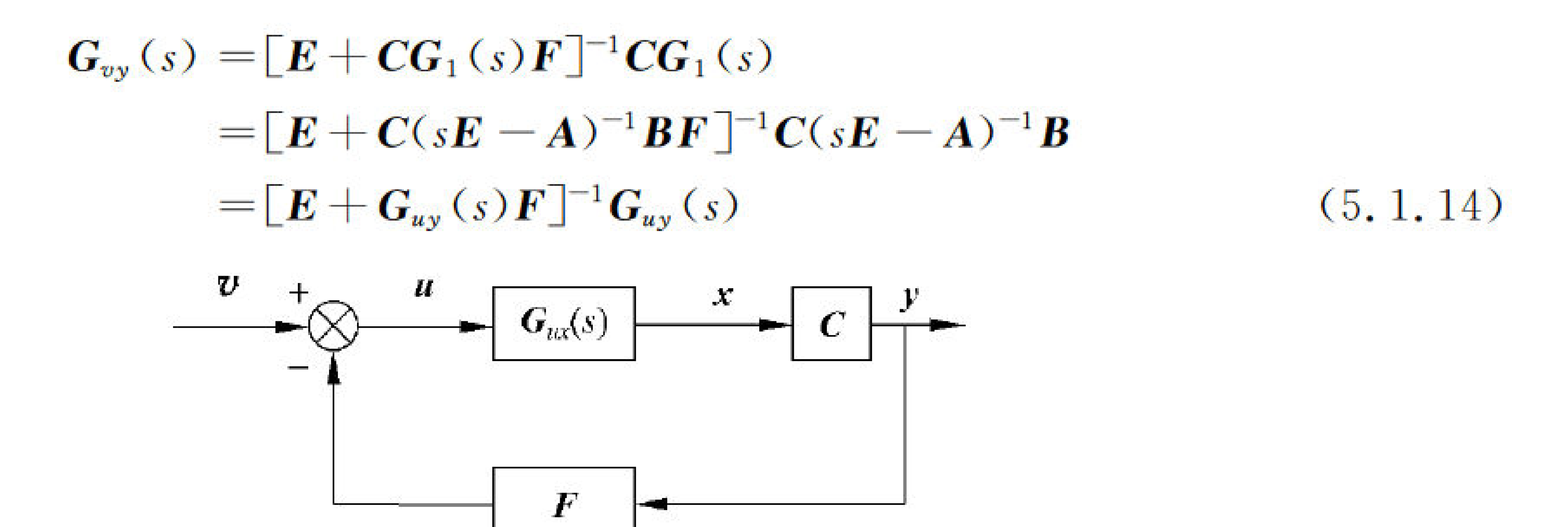


图5.1.2 输出反馈

由于输出反馈是状态反馈的特殊形式,式(5.1.13)也可在式(5.1.11)中取 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{FC}$ 得到。

3. 状态反馈与能控性和能观测性

系统(5.1.1)的能控性判别矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \tag{5.1.15}$$

闭环系统(5.1.5)的能控性判别矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_K=[\boldsymbol{B}\quad (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})^{n-1}\boldsymbol{B}] \tag{5.1.16}$$

因为

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{KB} \tag{5.1.17}$$

所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{AB}$ 的线性组合,亦即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{B}$ 的各列是 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{AB}$ 的各个列的线性组合。同理,

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})^2\boldsymbol{B} \\ &= [\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{ABK}-\boldsymbol{BKA}-\boldsymbol{BKBK}]\boldsymbol{B} \\ &= [\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{ABK}-\boldsymbol{BKA}-\boldsymbol{BKBK}]\boldsymbol{B} \\ &= \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{KB}-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{KAB}-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{KBKB}\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})^2\boldsymbol{B}$ 的各列是 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}$ 各列的线性组合。以此类推,可知 $\boldsymbol{Q}_K$ 的各列总能被 $\boldsymbol{Q}$ 的各列线性表示,因此

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_K\leqslant\mathrm{rank}\boldsymbol{Q} \tag{5.1.19}$$

另一方面,由于

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})+\boldsymbol{BK} \tag{5.1.20}$$

同理可得

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}\leqslant\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_K \tag{5.1.21}$$

因此必有

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_K=\mathrm{rank}\boldsymbol{Q} \tag{5.1.22}$$

即闭环系统和开环系统的能控性相同，亦即状态反馈不改变系统的能控性。

状态反馈是否一定保持系统的能观测性呢？

【例 5.1.1】 考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \tag{5.1.23}$$

能观测性判别矩阵

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 5\end{bmatrix} \tag{5.1.24}$$

秩为 2，于是系统能观测。

取状态反

$$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{Kx}+\boldsymbol{v}=-\begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix}+\boldsymbol{v} \tag{5.1.25}$$

闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \tag{5.1.26}$$

能观测性判别矩阵

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \tag{5.1.27}$$

秩为 1，因此，闭环系统不能观测；另外，若取

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix} \tag{5.1.28}$$

则闭环系统能观测。

这个例子表明，状态反馈有可能改变系统的能观测性。

4. 输出反馈与能控性和能观测性

输出反馈(5.1.3)作为状态反馈的特例，自然也不改变系统的能控性。

考虑输出反馈的闭环系统(5.1.6)。其对偶系统是

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\,\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{v}}(t)$$
$$\bar{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{x}}(t) \tag{5.1.29}$$

从形式上看，这是系统

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}(t)$$
$$\bar{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{x}}(t) \tag{5.1.30}$$

与状态反馈

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{v}}(t) \tag{5.1.31}$$

构成的闭环系统。

由于状态反馈不改变能控性。因此，闭环系统$(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$和系统$(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$的能控性相同；根据对偶原理，系统$(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BFC},\boldsymbol{C})$和系统$(-\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$的能观测性相同。因为系统$(-\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$和系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$的能观测性判别矩阵具有相同的秩，所以系统$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BFC},\boldsymbol{C})$和系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$的能观测性相同，即输出反馈不改变系统的能观测性。

这个结论也可由系统(5.1.6)和系统(5.1.1)的能观测性判别矩阵的行可由彼此的行线

性表示来证明。

5.2 极点配置

1. 极点配置概述

考虑线性定常控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量,$\boldsymbol{u}(t)$是 p 维控制向量,$\boldsymbol{y}(t)$是 q 维控制向量。给定 n 个期望的闭环系统极点

$$\{\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*\} \tag{5.2.2}$$

可以是实数或共轭的复数。通常期望极点是由系统设计的性能指标如过渡时间、超调量、增益裕度、相位稳定裕度和经验等转换而来的。

极点配置问题,就是确定状态反馈

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \tag{5.2.3}$$

或者输出反馈

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{v}(t) \tag{5.2.4}$$

使得相应的闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

或者

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

的极点为$\{\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*\}$。其中$\boldsymbol{v}(t)$是新的控制输入,$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 是常值反馈增益矩阵,阶数分别是 $p\times n$ 和 $p\times q$。

对于极点配置,有两个基本问题:第一,极点配置的条件,即在什么条件下可以进行极点配置,或说存在反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 或 $\boldsymbol{F}$;第二,建立求解反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 或 $\boldsymbol{F}$ 的算法。为了给出极点配置条件,需要了解循环矩阵的概念和性质。

2. 循环矩阵

如果 n 阶实数方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式就是其特征多项式,则称 $\boldsymbol{A}$ 为循环矩阵。

循环矩阵具有以下性质:

(1) 在循环矩阵的 Jordan 标准型中,每个特征值只对应一个 Jordan 块(含标量作为特例);或者说,每个特征值的几何重数都是 1。

(2) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值两两互异,则 $\boldsymbol{A}$ 必为循环矩阵。

(3) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的循环性是指,存在向量 $\boldsymbol{b}$,使得 $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}\} = n$,即系统$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$能控。

(4) 若多输入系统$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$能控,其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times p$,$p\geqslant 2$,则对几乎任意的 p 维列向量 $\boldsymbol{\rho}$,构造的单输入系统$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{\rho})$能控。

(5) 若多输入系统$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$能控,其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times p$,$p\geqslant 2$,但 $\boldsymbol{A}$ 不是循环矩阵,则对几乎任意的 $p\times n$ 常值矩阵 $\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ 是循环矩阵。

3. 状态反馈极点配置的条件

当面对极点配置的任务时，由于不同的性能指标往往对应不同的极点，因此，期望能够对闭环极点进行任意配置是自然的要求。这里的“任意”，也不是绝对的，具体含义如下：

(1) 期望极点中的复数必须以共轭的形式成对出现。

(2) 极点的实部和虚部的数值任意。

(3) 极点的代数重数任意。

(4) 任何期望极点的几何重数不得超过控制输入的维数，否则闭环系统不能控，开环系统自然也就不能控。例如把一个能控的单输入 $n(n\geqslant 2)$ 阶系统的极点配置为 1，几何重数是 n，这是做不到的。

定理 5.2.1　系统(5.2.1)可由状态反馈(5.2.3)任意配置极点的充分必要条件是，该系统能控。

证明：已知可任意配置极点，往证系统能控。只需证明，若系统不能控，则不能任意配置极点。

若系统(5.2.1)不能控，则由振型判据可知，存在 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 λ_0，使得

$$\operatorname{rank}[\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}]<n \tag{5.2.7}$$

对于任意的反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，

$$[\lambda_0\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\quad \boldsymbol{B}]=[\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K} & \boldsymbol{E}_p\end{bmatrix} \tag{5.2.8}$$

由于

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K} & \boldsymbol{E}_p\end{bmatrix} \tag{5.2.9}$$

总是可逆的，所以

$$\operatorname{rank}[\lambda_0\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\quad \boldsymbol{B}]=\operatorname{rank}[\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}]<n \tag{5.2.10}$$

即 λ_0 总是矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 的特征值(否则 $\operatorname{rank}[\lambda_0\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})]=n$，式(5.2.10)不可能成立)，这样显然做不到任意配置极点。

已知系统能控，往证可任意配置极点。对于单输入系统，可给出构造式的证明，进而可结合循环矩阵的性质证明结论对于多输入系统也成立。见状态反馈极点配置算法一，及其后续分析。

4. 状态反馈极点配置算法一：标准型法

这个算法的前提条件是：系统完全能控；核心思想是：系统极点和特征多项式(即其系数)一一对应，从而可以通过配置特征多项式系数来配置极点。

考虑单输入线性定常控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t) \tag{5.2.11}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$是标量控制输入。给定 n 个期望的闭环系统极点

$$\{\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*\} \tag{5.2.12}$$

求反馈增益向量 $\boldsymbol{k}$ 对应的状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{v}(t) \tag{5.2.13}$$

使得相应的闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}\boldsymbol{v}(t) \tag{5.2.14}$$

具有极点(5.2.12)。

由于系统(5.2.11)能控,根据第3章的相关算法,可以构造可逆状态变换矩阵 $\boldsymbol{P}$,把系统化为能控标准型,参数矩阵满足:

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{PAP}^{-1}, \quad \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{Pb} \tag{5.2.15}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.2.16}$$

矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的特征多项式为

$$f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{5.2.17}$$

期望的闭环系统极点 $\{\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*\}$ 对应的期望特征多项式为

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s-\lambda_1^*) \times \cdots \times (s-\lambda_n^*) \\ &= s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^* \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

若取行向量

$$\bar{\boldsymbol{k}} = [a_0^* - a_0 \quad a_1^* - a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}^* - a_{n-1}] \tag{5.2.19}$$

则通过简单矩阵运算可得

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{k}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [a_0^* - a_0 \quad a_1^* - a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}^* - a_{n-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0^* - a_0 & a_1^* - a_1 & \cdots & a_{n-1}^* - a_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* & \cdots & -a_{n-1}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

于是 $\bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{k}}$ 的特征多项式为

$$s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^* \tag{5.2.21}$$

根据式(5.2.18),$\bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{k}}$ 的特征值恰为 $\{\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*\}$。至此,当系统状态方程为能控标准型时,已经得到了状态反馈极点配置的反馈增益求解方法。

由式(5.2.15)和式(5.2.20)得,

$$\bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{PAP}^{-1} - \boldsymbol{Pb}\,\bar{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\,\bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}^{-1} \tag{5.2.22}$$

等价于

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\,\bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}^{-1}(\bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{P} \tag{5.2.23}$$

这样,由于 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\,\bar{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{P})$ 和 $(\bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{k}})$ 相似,$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\,\bar{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{P})$ 的特征值也是期望极点 $\{\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*\}$。对

照式(5.2.14)和式(5.2.23)，显然 $\boldsymbol{k}=\bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}$ 就是所求的状态反馈增益向量。

至此，得到以下的极点配置算法：

第 1 步，检验系统(5.2.1)是否能控。若是，进行下一步；若否算法终止。

第 2 步，求解变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，以及式(5.2.16)。

第 3 步，按照式(5.2.18)计算期望极点对应的特征多项式。

第 4 步，按照式(5.2.19)计算得行向量 $\bar{\boldsymbol{k}}$。

第 5 步，计算 $\boldsymbol{k}=\bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}$，得所求的状态反馈增益向量。

对于能控的多输入系统(5.2.1)，根据循环矩阵的性质(5)和(4)，总可以把状态反馈极点配置为题转化为单输入的情形，得到反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，这就完成了定理 5.2.1 的证明。

对于能控的多输入系统(5.2.1)，也可以仿照单输入的算法，借助多输入系统的 Luenberger(龙伯格)第二标准型实现状态反馈极点配置。由于 Luenberger 第二标准型求解较为复杂，此处不再列出。

5. 状态反馈极点配置算法二：特征多项式法

这个算法的前提条件和标准型法相同，也是系统完全能控；核心思想是：借鉴标准型法并利用 Cayley-Hamilton 定理进行改进，最终用能控性判别矩阵和期望闭环多项式构造出状态反馈增益。

问题的提法和标准型法相同。

根据第 3 章能控标准型的相关内容，化系统(5.2.11)为能控标准型(5.2.16)的变换矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix} \tag{5.2.24}$$

其中

$$\boldsymbol{p}_1=[0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1][\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]^{-1} \tag{5.2.25}$$

是能控性判别矩阵的逆的最后一行。

把式(5.5.24)代入 $\boldsymbol{k}=\bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}&=\bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}\\ &=[a_0^*-a_0\ \ a_1^*-a_1\ \ \cdots\ \ a_{n-1}^*-a_{n-1}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}\\ &=(a_0^*-a_0)\boldsymbol{p}_1+(a_1^*-a_1)\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}+\cdots+(a_{n-1}^*-a_{n-1})\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^{n-1}\\ &=\boldsymbol{p}_1[(a_0^*-a_0)\boldsymbol{E}_n+(a_1^*-a_1)\boldsymbol{A}+\cdots+(a_{n-1}^*-a_{n-1})\boldsymbol{A}^{n-1}]\\ &=\boldsymbol{p}_1[(a_0^*\boldsymbol{E}_n+a_1^*\boldsymbol{A}+\cdots+a_{n-1}^*\boldsymbol{A}^{n-1})-\\ &\quad(a_0\boldsymbol{E}_n+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1})]\\ &=\boldsymbol{p}_1[(a_0^*\boldsymbol{E}_n+a_1^*\boldsymbol{A}+\cdots+a_{n-1}^*\boldsymbol{A}^{n-1}+\boldsymbol{A}^n)-\\ &\quad(a_0\boldsymbol{E}_n+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\boldsymbol{A}^n)]\end{aligned} \tag{5.2.26}$$

回顾式(5.2.17)和式(5.2.18),$f(s)$是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式。根据 Caley-Hamilton 定理,有

$$f(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{E}_n + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \boldsymbol{A}^n = 0 \tag{5.2.27}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k} &= \boldsymbol{p}_1[(a_0^*\boldsymbol{E}_n + a_1^*\boldsymbol{A} + \cdots + a_{n-1}^*\boldsymbol{A}^{n-1} + \boldsymbol{A}^n) - \\ &\quad (a_0\boldsymbol{E}_n + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \boldsymbol{A}^n)] \\ &= \boldsymbol{p}_1 f^*(\boldsymbol{A})\end{aligned} \tag{5.2.28}$$

至此,得到以下的极点配置算法:

第 1 步,检验系统(5.2.11)是否能控。若是,进行下一步;若否算法终止。

第 2 步,按照式(5.2.25)计算得行向量 $\boldsymbol{p}_1$。

第 3 步,按照式(5.2.18)计算期望极点对应的特征多项式 $f^*(s)$。

第 4 步,按照式(5.2.28)计算得行向量$\bar{\boldsymbol{k}}$。

6. 状态反馈极点配置算法三:矩阵方程法

这个算法同时适用于单输入和多输入系统。前提条件是:第一,系统能控;第二,期望的闭环极点和开环极点没有重复的。核心思想是:利用相似矩阵特征值系统的原理建立矩阵方程(本质是线性方程组),再由方程的解构造出状态反馈增益矩阵。

考虑线性定常控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{5.2.29}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量,$\boldsymbol{u}(t)$是 p 维控制向量。给定 n 个期望的闭环系统极点

$$\{\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*\} \tag{5.2.30}$$

求反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 对应的状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \tag{5.2.31}$$

使得相应的闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t) \tag{5.2.32}$$

具有极点(5.2.30)。

首先给出算法步骤,然后给出证明和说明。

第 1 步,检验系统(5.2.29)是否能控。若是,进行下一步;若否算法中止。

第 2 步,检验 $\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*$ 是否为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。可通过判断 $\boldsymbol{A} - \lambda_i^*\boldsymbol{E}_n$ 的秩是否等于 n 来进行。系若 $\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*$ 都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,进行下一步;若否算法中止。

第 3 步,选取 n 阶实数矩阵 $\boldsymbol{H}$,使其特征值为期望极点 $\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*$。如可按照(5.2.18)计算期望特征多项式,再建立伴侣矩阵形式的 $\boldsymbol{H}$。

第 4 步,选取 $p \times n$ 矩阵 $\bar{\boldsymbol{K}}$,使得系统$(\bar{\boldsymbol{K}}, \boldsymbol{H})$能观测。

第 5 步,求解关于未知 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的矩阵方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{K}} \tag{5.2.33}$$

第 6 步,若系统为单输入,进行下一步;若系统为多输入,但 $\boldsymbol{T}$ 可逆,进行下一步;否则,返回第 4 步,选取另一个满足$(\bar{\boldsymbol{K}}, \boldsymbol{H})$能观测的 $\bar{\boldsymbol{K}}$。

第 7 步,计算 $\boldsymbol{K} = \bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}^{-1}$,即所求的状态反馈增益矩阵。

根据式(5.2.33),若该方程有可逆的解矩阵 $\boldsymbol{T}$,则有

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{5.2.34}$$

于是闭环系统矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 相似，其特征值为期望极点 $\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*$。

若 $\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*$ 都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则方程(5.2.33)有唯一解。在此基础上，对于单输入系统，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$能控、$(\bar{\boldsymbol{K}},\boldsymbol{H})$能观测是 $\boldsymbol{T}$ 可逆的充分必要条件；对于多输入系统，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$能控、$(\bar{\boldsymbol{K}},\boldsymbol{H})$能观测仅为 $\boldsymbol{T}$ 可逆的必要条件。

7. 状态反馈极点配置算法四：待定参数法

这个算法的前提条件是：控制矩阵的秩是 1，因此主要针对单输入系统；核心思想是，把状态反馈增益向量的分量视为待定参数，计算系统的特征多项式。这个多项式的系数必然依赖控制参数。把这个多项式和期望极点对应的特征多项式做比较，即对应项系数相等，建立关于控制参数的方程组，进而解得控制参数。

考虑单输入线性定常控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}(t) \tag{5.2.35}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$是标量控制输入。给定 n 个期望的闭环系统极点

$$\{\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*\} \tag{5.2.36}$$

求反馈增益向量 $\boldsymbol{k}=[k_1\quad\cdots\quad k_n]$对应的状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{v}(t) \tag{5.2.37}$$

使得相应的闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}\boldsymbol{v}(t) \tag{5.2.38}$$

具有极点(5.2.36)。

闭环系统矩阵$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})$的特征多项式为

$$\begin{aligned}f(s,k)&=\det[s\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})]\\&=s^n+a_{n-1}(\boldsymbol{k})s^{n-1}+\cdots+a_1(\boldsymbol{k})s+a_0(\boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{5.2.39}$$

其中 $a_0(\boldsymbol{k}),a_1(\boldsymbol{k}),\cdots,a_{n-1}(\boldsymbol{k})$都是关于 $k_1,\cdots,k_n$ 的函数。

期望的闭环系统极点$\{\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*\}$对应的期望特征多项式为

$$\begin{aligned}f^*(s)&=(s-\lambda_1^*)\times\cdots\times(s-\lambda_n^*)\\&=s^n+a_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+a_1^*s+a_0^*\end{aligned} \tag{5.2.40}$$

$\{\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*\}$为闭环系统(5.2.35)的极点当且仅当 $f(s,\boldsymbol{k})=f^*(s)$，即对应项系数相同。于是得方程组

$$a_0(\boldsymbol{k})=a_0^*,\quad a_1(\boldsymbol{k})=a_1^*,\cdots,a_{n-1}(\boldsymbol{k})=a_{n-1}^* \tag{5.2.41}$$

求解这个关于 $k_1,\cdots,k_n$ 方程组，进而得到控制律(5.2.37)。

这个方法不需要系统能控的前提，对期望极点和开环极点也没有要求，反馈增益唯一取决于方程组解的情况，即唯一解、无解和无穷多解等情况。

由式(5.2.39)的行列式计算可知，$a_0(\boldsymbol{k}),a_1(\boldsymbol{k}),\cdots,a_{n-1}(\boldsymbol{k})$都是关于 $k_1,\cdots,k_n$ 的多项式，而多项式的最高次数等于控制矩阵的秩！因此，只有当系统为单输入或控制矩阵秩为 1 的时候，方程组(5.2.41)才是线性的。否则，式(5.2.41)必然是多元高次方程组，理论上可以采用结式消元法得到精确解，但计算复杂度非常高。总的说来，多元高次方程组没有有效解法。

以上各种极点配置方法各有特点，可以根据需要灵活选择。由于特征多项式无法区分极点的代数重数和几何重数，因此若对此有严格要求，就必须考虑矩阵方程法。因为该方法中的矩阵 $\boldsymbol{H}$ 可以表示对期望极点的任意要求，而相似变换保持矩阵特征值的全部重数特征

不变。

8. 状态反馈对系统零点的影响

状态反馈在改变系统极点的同时,对系统的零点又有什么影响呢?这里依托极点配置的标准型法给出说明。

考虑具有能控标准型实现的 n 阶单输入-单输出系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=[c_0 \quad c_1 \quad \cdots \quad c_{n-1}]\boldsymbol{x}(t) \tag{5.2.42}$$

回顾第1章传递函数的直接分解,系统(5.2.42)对应的开环传递函数为

$$g(s)=\frac{c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \tag{5.2.43}$$

对系统进行极点配置后,闭环系统的期望特征多项式为

$$\begin{aligned}f^*(s)&=(s-\lambda_1^*)\times\cdots\times(s-\lambda_n^*)\\&=s^n+a_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+a_1^*s+a_0^*\end{aligned} \tag{5.2.44}$$

同时,输入向量和输出向量并未改变。因此,闭环系统的传递函数变为

$$g^*(s)=\frac{c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1s+c_0}{s^n+a_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+a_1^*s+a_0^*} \tag{5.2.45}$$

观察 $g^*(s)$ 和 $g(s)$,发现零点多项式并未改变。因此状态反馈不会直接改变系统的零点。

另一方面,状态反馈显然可以改变系统极点,从而有能力使闭环系统的极点与零点重合从而形成对消!因此,状态反馈有可能通过零极相消间接改变系统零点。这也是状态反馈可能改变系统能观测性的本质原因。

如果被控对象没有零点,则零极相消不可能发生,这时状态反馈既不改变系统的能观性,也不改变系统的能控性。

对于多输入-多输出系统(5.2.1),称满足

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}s_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}<n+\min(\operatorname{rank}\boldsymbol{B},\operatorname{rank}\boldsymbol{C}) \tag{5.2.46}$$

的 s_0 为系统的输入-输出解耦零点,或传输零点,包含单输入-单输出系统的零点作为特例。

状态反馈对于传输零点的影响,与单输入-单输出系统时相同;但状态反馈能够改变传递函数矩阵的每个元素,包括其零极点。

以上讲状态反馈不直接改变传递函数(矩阵)的传输零点,必须强调是原控制输入端到原输出端的传递函数(矩阵)!如果不是这样规定的输入端和(或)输出端,任何反馈都完全可能改变对应的传输零点。因此,由于系统输入、输出的多样性,极点配置之外实际上也有零点配置问题,只是没有很好的解决方法。

9. 输出反馈极点配置

利用(静态)输出反馈控制律(5.2.4)对系统(5.2.1)进行极点配置,可以借用状态反馈极点配置的待定参数法来进行相关讨论。

注意到输出反馈增益矩阵 $\boldsymbol{F}$ 包含的自由参数个数是 $p\times q$，而若仿照式(5.2.39)～式(5.2.41)建立方程组，方程个数为系统阶次 n。若 $pq<n$ 对于一般的极点配置，方程组显然无解。

可以证明，若 $pq\geqslant n+1$，则对于任意的期望极点，则对应的方程组几乎总有实数解，即几乎可以任意配置极点。

然而，$pq\geqslant n+1$ 意味着 $p,q\geqslant 2$，导致方程组不是线性的，即便理论上有解，算法上却无法顺利求解。

另一个相关结论是，若 $p+q\geqslant n+1$，则有较好的算法对全部 n 个期望极点进行任意接近的配置，这里不再详述。

鉴于 $pq\geqslant n+1$ 和 $p+q\geqslant n+1$ 对于一般控制系统来说难以成立，因此，静态输出反馈难以做到配置全部 n 个期望极点，因而意义非常有限。要想进行真正满足性能要求的极点配置，必须借助于状态反馈或动态的输出反馈。

输出反馈对系统传输零点和传递函数矩阵的影响，可以将其作为状态反馈特例的角度取理解。

5.3　状态反馈解耦

解耦控制有称为一对一控制，最早的相关工作由 E. G. Eilbert 完成，史称 Morgan 问题，是多输入-多输出系统的重要组成部分。

对于一般的多输入-多输出系统，输入量和输出量之间通常相互耦合，即一个输入分量影响多个输出分量，同时一个输出分量也受到多个输入分量的影响。这样系统的分析和设计就比较复杂。解耦控制，就是寻求适当的控制律，使得闭环系统的输入和输出实现一对一的控制，从而简化分析和设计。

解耦控制有时间域方法和频率域方法，前者有包含代数方法和几何方法。这里采用代数方法讨论解耦问题。

5.3.1　解耦的基本概念和要求

考虑多输入-多输出线性定常控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$是 l 维控制向量，$\boldsymbol{y}(t)$是 m 维控制向量。

要实现系统解耦，需要对系统附加以下三个条件。

(1) 系统输入输出维数相等，即 $l=m$，且 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}=\mathrm{rank}\boldsymbol{C}=m$，即输入矩阵和输出矩阵分别是列线性无关和行线性无关。

如果输入矩阵列线性相关，说明个输入分量之间不是线性独立的，因此有些输入分量可以由其余分量的线性组合代替。

(2) 控制律采用整体反馈和输入变换相结合的方式，即

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}(t)\tag{5.3.2}$$

其中 $\boldsymbol{v}(t)$是新的 m 维控制输入向量，$\boldsymbol{R}$ 是 $m\times m$ 的输入变换矩阵，$\boldsymbol{F}$ 是 $m\times n$ 的状态反馈增

益矩阵。控制律(5.3.2)简记为$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$,与系统(5.3.1)构成的闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{BR}\,\boldsymbol{v}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{Cx}(t)\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

(3) 输入变换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 可逆。否则输入矩阵 $\boldsymbol{BR}$ 不是列线性无关的,不符合条件(1),导致设计无法进行。

闭环系统(5.3.3)的传递函数矩阵是

$$\boldsymbol{G}_C(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF})^{-1}\boldsymbol{BR} \tag{5.3.4}$$

若存在控制律(5.3.2)即矩阵对$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$,使得

$$\boldsymbol{G}_C(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & g_{mm}(s)\end{bmatrix} \tag{5.3.5}$$

即为对角矩阵,且 $g_{mm}(s)\neq 0$,则称系统(5.3.1)是可解耦的。

因此,解耦后多输入-多输出就变成了多个单输入-单输出系统,可以简化下一步的分析和设计。

5.3.2　可解耦条件和控制律设计

考虑到物理实现的客观约束,这里讨论使得

$$\boldsymbol{G}_C(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{s^{\alpha_m}}\end{bmatrix} \tag{5.3.6}$$

的解耦控制律$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$的存在条件,其中 $\alpha_i\geqslant 1$。这等价于输入向量$\boldsymbol{v}(t)$和输出向量 $\boldsymbol{y}(t)$之间满足

$$\begin{aligned} y_1^{(\alpha_1)}(t) &= \boldsymbol{v}_1(t)\\ &\vdots\\ y_m^{(\alpha_m)}(t) &= \boldsymbol{v}_m(t)\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

在实现解耦控制的同时,使得每个输出分量 $y_i(t)$是对应输入分量 $v_i(t)$的 α_i 阶积分。因此称式(5.3.6)是积分型解耦系统。

为推导解耦判别条件,对系统(5.3.1)的输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 进行行剖分,即

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_m\end{bmatrix} \tag{5.3.8}$$

根据输出方程,对每个输出分量,有

$$y_i(t) = c_i\boldsymbol{x}(t) \tag{5.3.9}$$

两端对时间求导,得

$$y_i^{(1)}(t) = c_i\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{5.3.10}$$

结合系统(5.3.1)的状态方程,得

$$y_i^{(1)}(t) = c_i[\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{Bu}(t)] = c_i\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+c_i\boldsymbol{Bu}(t) \tag{5.3.11}$$

若 $c_i\boldsymbol{B}\neq 0$（m 维行向量），则记 $\alpha_i=1$，停止求导运算；否则，$c_i\boldsymbol{B}=0$，式(5.3.11)两端继续对时间求导、代入状态方程，得

$$y_i^{(2)}(t)=c_i\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(t)+c_i\boldsymbol{AB}\boldsymbol{u}(t) \tag{5.3.12}$$

若 $c_i\boldsymbol{AB}\neq 0$，记 $\alpha_i=2$，停止求导运算。否则，$c_i\boldsymbol{AB}=0$，式(5.3.12)两端继续对时间求导、代入状态方程，直到对某个 α_i，有 $c_i\boldsymbol{A}^{\alpha_i-1}\boldsymbol{B}\neq 0$ 为止。这时，有

$$y_i^{(\alpha_i)}(t)=c_i\boldsymbol{A}^{\alpha_i}\boldsymbol{x}(t)+c_i\boldsymbol{A}^{\alpha_i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{5.3.13}$$

若在对 $y_i(t)$ 的求导过程中始终有 $c_i\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}=0,r=0,1,\cdots,n-1$，则记 $\alpha_i=n$。

总结以上求导和代入过程，可得表达式

$$\alpha_i=\begin{cases}\min\{k\mid c_i\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}\neq 0,1\leqslant k\leqslant n\}\\ n,c_i\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}=0,r=0,1,\cdots,n-1\end{cases} \tag{5.3.14}$$

称 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 为系统(5.3.1)的解耦阶常数。

根据式(5.3.13)，有

$$\begin{bmatrix}y_1^{(\alpha_1)}(t)\\ \vdots\\ y_m^{(\alpha_m)}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\boldsymbol{A}^{\alpha_1}\\ \vdots\\ c_m\boldsymbol{A}^{\alpha_m}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}c_1\boldsymbol{A}^{\alpha_1-1}\boldsymbol{B}\\ \vdots\\ c_m\boldsymbol{A}^{\alpha_m-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t) \tag{5.3.15}$$

记

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}c_1A^{\alpha_1}\\ \vdots\\ c_mA^{\alpha_m}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}c_1A^{\alpha_1-1}B\\ \vdots\\ c_mA^{\alpha_m-1}B\end{bmatrix} \tag{5.3.16}$$

称 $m\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为系统(5.3.1)的解耦判别矩阵。

若判别矩阵 $\boldsymbol{D}$ 可逆，选取控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v}(t) \tag{5.3.17}$$

代入式(5.3.15)即得式(5.3.7)。因此，控制律(5.3.17)满足解耦要求。

把式(5.3.17)和式(5.3.2)相对照，得

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L},\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{D}^{-1} \tag{5.3.18}$$

至此，已经得到了系统可由控制律(5.3.2)实现积分型解耦的判别条件以及控制律参数矩阵的整定方法。

5.3.3　结合极点配置的解耦控制

积分型解耦系统(5.3.6)虽然实现了输入输出的解耦，但由于系统极点为 0，显然不能满足动态性能要求。

在积分型解耦系统(5.3.6)的基础上，记解耦阶常数为 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$，进一步考虑极点配置。比如，要求第 i 组输入-输出满足

$$y_i(s)=\frac{1}{s^{\alpha_i}+\beta_{i,\alpha_i-1}s^{\alpha_i-1}+\cdots+\beta_{i,1}s+\beta_{i,0}}v_i(s) \tag{5.3.19}$$

其中

$$f_i(s)=s^{\alpha_i}+\beta_{i,\alpha_i-1}s^{\alpha_i-1}+\cdots+\beta_{i,1}s+\beta_{i,0} \tag{5.3.20}$$

为期望极点对应的特征多项式。亦即，要求闭环传递函数矩阵为

$$\bar{G}_C(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_1(s)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{f_m(s)} \end{bmatrix} \tag{5.3.21}$$

由式(5.3.19)得

$$v_i(t) = y^{(\alpha_i)}(t) + \beta_{i,\alpha_i-1} y^{(\alpha_i-1)}(t) + \cdots + \beta_{i,1} y^{(1)}(t) + \beta_{i,0} y(t) \tag{5.3.22}$$

把式(5.3.9)～式(5.3.13)所得的 $y^{(\alpha_i)}(t), y^{(\alpha_i-1)}(t), \cdots, y^{(1)}(t), y(t)$ 代入,得

$$\begin{aligned} v_i(t) &= c_i \boldsymbol{A}^{\alpha_i} \boldsymbol{x}(t) + c_i \beta_{i,\alpha_i-1} \boldsymbol{A}^{\alpha_i-1} \boldsymbol{x}(t) + c_i \beta_{i,1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}(t) + c_i \beta_{i,0} \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{x}(t) + c_i \boldsymbol{A}^{\alpha_i-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{u}(t) \\ &= c_i (\boldsymbol{A}^{\alpha_i} + \beta_{i,\alpha_i-1} \boldsymbol{A}^{\alpha_i-1} + \cdots + \beta_{i,1} \boldsymbol{A} + \beta_{i,0} \boldsymbol{E}_n) \boldsymbol{x}(t) + c_i \boldsymbol{A}^{\alpha_i-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{u}(t) \\ &= c_i f_i(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{x}(t) + c_i \boldsymbol{A}^{\alpha_i-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{u}(t) \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

即

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 f_1(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ c_m f_m(\boldsymbol{A}) \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} c_1 \boldsymbol{A}^{\alpha_1-1} \boldsymbol{B} \\ \vdots \\ c_m \boldsymbol{A}^{\alpha_m-1} \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \tag{5.3.24}$$

记

$$\bar{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} c_1 f_1(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ c_m f_m(\boldsymbol{A}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} c_1 \boldsymbol{A}^{\alpha_1-1} \boldsymbol{B} \\ \vdots \\ C_m \boldsymbol{A}^{\alpha_m-1} \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{5.3.25}$$

若判别解耦矩阵 $\boldsymbol{D}$ 可逆,则由式(5.3.24)可解得控制律

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{D}^{-1} \bar{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{v}(t) \tag{5.3.26}$$

根据上述过程逆向推导,可得解耦的传递函数矩阵(5.3.21)。

把式(5.3.26)和式(5.3.2)相对照,得到解耦控制参数矩阵

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{D}^{-1} \bar{\boldsymbol{L}}, \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}^{-1} \tag{5.3.27}$$

至此,已经得到了系统可由控制律(5.3.2)实现解耦、极点配置的判别条件以及控制律设计方法。

【例 5.3.1】 已知系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

求形如式(5.3.2)的控制律,使闭环系统传递函数矩阵实现形如

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s+a_1} & \\ & \frac{1}{s+a_2} \end{bmatrix} \tag{5.3.29}$$

的解耦和极点配置。

解: 计算得该系统的解耦阶常数是 $a_1 = a_2 = 1$,解耦判别矩阵 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}_2$,可逆。因此题目

要求的控制律存在。

按照式(5.3.25),

$$\bar{\boldsymbol{L}}=\begin{bmatrix} c_1\boldsymbol{A}+a_1c_1\boldsymbol{E}_3 \\ c_2\boldsymbol{A}+a_2c_2\boldsymbol{E}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_1 & 1 \\ -1 & -2 & a_2-3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}_2^{-2}=\boldsymbol{E}_2 \tag{5.3.30}$$

所以实现解耦和极点配置的控制律为

$$\boldsymbol{u}(t)=-\begin{bmatrix} a_1 & a_1 & 1 \\ -1 & -2 & a_2-3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{v}(t) \tag{5.3.31}$$

注意到原系统为 3 阶,而式(5.3.29)的系统只有两个极点,并未实现完全的极点配置。因此,这种解耦方式是有缺陷的。再者,如系统存在参数摄动,显然会直接影响到解耦阶常数和解耦判别矩阵,从而影响可解耦性以及解耦控制律。实际上,解耦控制对系统参数摄动很敏感。这也是运用解耦控制时需要注意的问题。

5.4　线性二次型最优控制

线性二次型最优控制问题的研究对象是线性的时变或定常控制系统,性能指标是状态向量的半正定二次型与控制向量的正定二次型之和对时间的积分,目的是寻找一个使得积分性能指标最小的控制律。按照积分上限取有限值或无穷,又分为有限时间最优控制和无限时间最优控制。

线性二次型最优控制可以约束全部状态变量(包括输出变量)在过渡过程的动态行为,包括快速性和平稳性;同时,非常重要的一点,可以实现过渡过程中对各个控制输入变量的约束,这是其他控制方法难以做到的;各种情况下最优控制律都是状态的线性函数,即最优控制律为线性反馈。

线性二次型最优控制内容很多,本节仅讨论形式简洁且易于实现的定常系统、无限时间情形的线性二次型最优控制。

考虑线性定常控制系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad t\geqslant 0 \\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量,$\boldsymbol{u}(t)$是 p 维控制向量,$\boldsymbol{y}(t)$是 q 维控制向量。

非零的初始状态将产生自由响应 $\boldsymbol{x}(t)$和 $\boldsymbol{y}(t)$。考虑选取控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$,$t\geqslant 0$,使得以下二次型积分性能指标

$$J[\boldsymbol{u}(t)]=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{5.4.2}$$

达到最小,或者说,在微分方程约束条件即式(5.4.1)下求解最优化问题

$$\min_{\boldsymbol{u}(t)} J[\boldsymbol{u}(t)] \tag{5.4.3}$$

式(5.4.2)中 $\boldsymbol{Q}$ 为 $n\times n$ 正定或半正定的加权矩阵,$\boldsymbol{R}$ 为 $p\times p$ 正定的加权矩阵,通常都取为对角矩阵;若强调对输出变量的约束,可取

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{C} \tag{5.4.4}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 是 $q\times q$ 的加权正定矩阵。于是有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{y}(t) \tag{5.4.5}$$

关于如上的最优控制,有如下结论:

定理 5.4.1 对于系统(5.4.1),线性二次型最优控制问题(5.4.3)的解为线性状态反馈

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{5.4.6}$$

其中状态反馈增益 $\boldsymbol{K}$ 由以下 Riccati 方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=0 \tag{5.4.7}$$

的正定解矩阵 $\boldsymbol{P}$ 构造:

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \tag{5.4.8}$$

最优性能指标为

$$\min J=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0) \tag{5.4.9}$$

证明从略。

对于定理 5.4.1 有如下几点解读:

(1) 定理的核心是 Riccati 方程(5.4.7)。如果系统($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$)能控、$\boldsymbol{Q}$ 正定,或 $\boldsymbol{Q}$ 半正定但系统($\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{A}$)能观测,则 Riccati 方程(5.4.7)有唯一正定解 $\boldsymbol{P}$。

(2) Riccati 方程的解可由 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{R}$ 构造得到,也可通过迭代计算得到,目前都有完善的算法。

(3) 状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与系统初始状态无关。

(4) 最优性能指标和状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 无关。

(5) 注意到性能指标(5.4.2)中的积分上限∞,要想无穷积分存在,必有被积函数趋于零。因此,当实现最优控制时,一定有 $\boldsymbol{x}(t)\to 0$ 和 $\boldsymbol{u}(t)\to 0$,系统渐近稳定的。由于线性定常系统是按照指数速度衰减的,因此,必有某个足够大的时刻 T,其后状态和输入的分量都任意小。这样看来,∞只是为了理论上的严谨性。从应用的角度来说,积分上限意味着过渡过程的结束和稳态过程的开始。

(6) 记加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 分别为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_n \end{bmatrix},\quad q_i\geqslant 0,\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix},\quad r_i>0 \tag{5.4.10}$$

则二次型积分性能指标(5.4.2)变为

$$J[\boldsymbol{u}(t)]=\int_0^{\infty}\{[q_1x_1^2(t)+\cdots q_nx_n^2(t)]+[r_1u_1^2(t)+\cdots r_pu_n^2(t)]\}\mathrm{d}t \tag{5.4.11}$$

在实现了最优控制的前提下,即 $J[\boldsymbol{u}(t)]$已取得最小值的前提下,权系数 q_1 越大,则对应的 $\int_0^{\infty}x_1^2(t)\mathrm{d}t$ 就必须越小(否则和 $J[\boldsymbol{u}(t)]$ 取得最小值相矛盾),这样一来,有效积分时间(理解为有限的过渡时间)不可能太长,$\boldsymbol{x}(t)$的平均幅值、最大幅值也不会太大。适当安排所有权系数的值,就能够得到好的系统运行品质和控制输入。

(7) 回顾线性系统的极点配置,其核心思想是:控制律决定闭环极点位置,进而影响(有时是决定)证系统的性能。但在最优控制中,省去了极点这一中间环节,建立了最优系统性能指标和控制律的直接关系。由于一般情况下系统性能与零极点关系的复杂性,后一种思路值得重点考虑。

5.5 状态观测器

由本章前面几节可以看到，状态反馈由于利用了系统内部的所有信息，因而具有很好的控制效果，静态的输出反馈难以做到这一点。与此同时，状态信息的检测和获取，在很多场合却是一个难题：

(1) 信号含义抽象，无法检测；

(2) 传感器使用寿命短，成本高；

(3) 物理环境导致信号难以检测；

(4) 检测结果不可靠，等等。

为了解决上述矛盾，状态观测或说状态重构是一条可以利用的途径。状态观测，就是构造一个动态系统，以原系统中某些可以直接测量的信号为输入，而输出就是急需的状态向量的估计值。这个构造的系统就称为原系统的状态观测器。

5.5.1 状态观测器的一般概念

考虑时变非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= f[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\\ \boldsymbol{y}(t) &= g[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$是已知的 p 维控制向量，$\boldsymbol{y}(t)$是 q 维可测输出向量。

一般说来，由于输出 $\boldsymbol{y}(t)$总是可测量的，而 $\boldsymbol{y}(t)$是状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$的函数，所以实际上 $\boldsymbol{x}(t)$中部分分量可以通过 $\boldsymbol{y}(t)$直接获得，而其余的是未知的。除非另外设置测量装置。

所谓状态观测器，就是根据系统(5.5.1)的结构、参数和信号构建的如下系统

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) &= \bar{f}\{\bar{\boldsymbol{x}}(t),[\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{y}(t)],t\}\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t) &= \bar{g}\{\bar{\boldsymbol{x}}(t),[\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{y}(t)],t\}\end{aligned} \tag{5.5.2}$$

其中$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$是状态向量，原系统的输入 $\boldsymbol{u}(t)$、输出 $\boldsymbol{y}(t)$都是观测器系统的输入向量，$\bar{\boldsymbol{y}}(t)$为可测输出向量，且有

$$\lim_{t\to\infty}\bar{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{x}(t) \tag{5.5.3}$$

这样的观测器称为状态渐近观测器。

一般的时变非线性系统，不存在统一的观测器设计方法。本节针对线性定常控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad t\geqslant 0\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

进行状态观测器的讨论。其中 $\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$是 p 维控制向量，$\boldsymbol{y}(t)$是 q 维输出向量。

5.5.2 开环状态观测器

在系统(5.5.4)中，假设系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都具有负实部。利用其参数和信号构造如下系统

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t) &= \bar{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{5.5.5}$$

其中$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$是状态向量,原系统的输入$\boldsymbol{u}(t)$是观测器系统的输入向量,$\bar{\boldsymbol{y}}(t)$为可测输出向量。

观测器系统(5.5.5)的状态方程虽然其系统矩阵、输入矩阵同于系统(5.5.4),但系统初态未必相同,因此就状态向量而言不能说是同一系统;这里输出向量也就是状态向量。状态向量通过对状态方程的积分获得,初值可以人为设定。

由于$\bar{\boldsymbol{y}}(t)=\bar{\boldsymbol{x}}(t)$,二者相同,所以输出方程通常并不明确列出。但必须注意,输出方程中$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$前面没有矩阵$\boldsymbol{C}$,$\bar{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}(t)$是一个常见的误区,属于概念性错误。

把系统(5.5.5)和系统(5.5.4)的状态方程两端相减,并记

$$\boldsymbol{d}(t)=\bar{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t) \tag{5.5.6}$$

可得

$$\dot{\boldsymbol{d}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}(t) \tag{5.5.7}$$

根据调查线性系统的自由响应公式,有

$$\boldsymbol{d}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{d}(0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}[\bar{\boldsymbol{x}}(0)-\boldsymbol{x}(0)] \tag{5.5.8}$$

由于矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值都具有负实部,对于任意的初始状态$\boldsymbol{x}(0)$和$\bar{\boldsymbol{x}}(0)$,都有

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{d}(t)=0 \tag{5.5.9}$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\bar{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{x}(t) \tag{5.5.10}$$

因此,系统(5.5.5)确为系统(5.5.4)的状态观测器。

观测器(5.5.5)要求原系统矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值都具有负实部,有时并不满足;即便满足,状态渐近观测的动态过程(也有快速性和平稳性等要求)完全由矩阵$\boldsymbol{A}$决定,显然无法调节。

针对这些情况,可以为系统(5.5.4)设计如下的闭环观测器。

5.5.3 闭环状态观测器

利用系统(5.5.4)的参数和信号构造如下系统

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)&=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{L}[\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{y}(t)]\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t)&=\bar{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{5.5.11}$$

或者等价的形式

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(t)\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t)&=\bar{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

其中$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$是状态向量,原系统的输入$\boldsymbol{u}(t)$、输出$\boldsymbol{y}(t)$都是观测器系统的输入向量,$\bar{\boldsymbol{y}}(t)$为可测输出向量。

待定矩阵$\boldsymbol{L}$称为观测器增益矩阵,矩阵$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})$是观测器的系统矩阵,其特征值称为是观测器极点。

观测器系统(5.5.11)的状态向量通过对状态方程的积分获得,初始状态通常取为$\bar{\boldsymbol{x}}(0)=0$。

与开环观测器相同,输出方程通常并不明确列出。但必须注意,输出方程中$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$前面没有矩阵$\boldsymbol{C}$,否则$\bar{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}(t)$,不可能是$\boldsymbol{x}(t)$的渐近观测,因为维数都不一样。

把观测器系统写为式(5.5.11),是为了突出在闭环观测器(5.5.5)的基础上引入误差

$C\bar{x}(t)-y(t)$作为反馈形成闭环；而写成式(5.5.12)，是为了突出$(A-LC)$为观测器的系统矩阵。观测器极点以及$u(t)$、$y(t)$都是观测器系统的输入。

把系统(5.5.11)和系统(5.5.1)的状态方程两端相减，并记

$$d(t)=\bar{x}(t)-x(t) \tag{5.5.13}$$

可得

$$\dot{d}(t)=(A-LC)d(t) \tag{5.5.14}$$

根据调查线性系统的自由响应公式，有

$$d(t)=e^{(A-LC)t}d(0)=e^{(A-LC)t}[\bar{x}(0)-x(0)] \tag{5.5.15}$$

只要矩阵$(A-LC)$的特征值都具有负实部，则对于任意的初始状态$x(0)$和$\bar{x}(0)$，都有

$$\lim_{t\to\infty}d(t)=0 \tag{5.5.16}$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\bar{y}(t)=x(t) \tag{5.5.17}$$

这样，系统(5.5.11)就成为系统(5.5.1)的状态观测器。

至此，问题转化为，怎样使矩阵$(A-LC)$的特征值都具有负实部。注意到$(A-LC)$与其转置$(A-LC)^{T}=A^{T}-C^{T}L^{T}$具有相同的特征值。回顾状态反馈极点配置的知识，只要系统(A^{T},C^{T})能控，则必存在状态反馈增益矩阵K，使得$A^{T}-C^{T}K$具有任意的期望极点，而且条件是充分必要的。利用对偶原理，(A^{T},C^{T})能控等价于$(C,-A)$能观测，进而等价于系统(C,A)能观测(依据秩判据)。于是得到以下基本结论：

定理 5.5.1　可以通过选取观测器增益矩阵L任意配置观测器极点的充分必要条件是，原系统能观测。

同时，矩阵$(A-LC)$的极点配置，可以参照系统(A^{T},C^{T})的状态反馈极点配置来进行处理；对于单输出系统，若选用待定参数法，则不用考虑对偶和矩阵、向量的转置。

要注意，观测器极点必须全部具有负实部。具体的极点位置，要考虑渐近观测的快速性、平稳性等要求。

观测器(5.5.11)也称为基本观测器。显然，与系统代数等价的系统都可以作为观测器。

5.5.4　降维闭环状态观测器

前面讲的开环观测器和闭环观测器，作为动态系统其阶次都与原系统相同，称为全维(full order)状态观测器。正如在观测器一般概念中提到的，某些状态变量可以通过输出直接得到。例如，如输出方程是$y(t)=x_1(t)$，则状态变量$x_1(t)$就不必通过渐近估计获取了，只需要把输出方程不能直接提供的状态变量估计出来就可以了。这就是所谓降维(reduced order)状态观测器的基本思想。

降维状态观测器减少了观测器中积分器的数目，降低了复杂度和成本，提高了可靠性。

对于系统(5.5.1)，引入状态的可逆变换

$$\bar{x}(t)=\begin{bmatrix}\bar{x}_1(t)\\ \bar{x}_2(t)\end{bmatrix}=P^{-1}x(t),\quad P=[P_1\quad P_2],\quad P_1:n\times q \tag{5.5.18}$$

把系统等价变换为

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1(t)\\ \dot{\bar{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1(t)\\ \bar{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}u(t),\quad y(t)=[E_q\quad 0]\begin{bmatrix}\bar{x}_1(t)\\ \bar{x}_2(t)\end{bmatrix}=\bar{x}_1(t) \tag{5.5.19}$$

这一变换的核心,是把输出矩阵 C 变为$[E_q\quad 0]$。只要 C 行线性无关,这样的变换一定存在。对于很多实际系统,通常无需这一变换,因为输出矩阵自然具有$[E_q\quad 0]$的形式。

由于 $y(t)=\bar{x}_1(t)$已知,因此只需对$\bar{x}_2(t)$进行渐近观测:$\hat{x}_2(t)\to\bar{x}_2(t)$,而$\hat{x}_2(t)$为降维观测器

$$\dot{\hat{x}}_2(t)=F\hat{x}_2(t)+Gy(t)+Hu(t) \tag{5.5.20}$$

的状态向量。进而进行状态的逆变换,可得渐近观测

$$\begin{aligned}&P_1y(t)+P_2\hat{x}_2(t)\\ =&P_1\bar{x}_1(t)+P_2\hat{x}_2(t)\to P_1\bar{x}_1(t)+P_2\bar{x}_2(t)\\ =&[P_1\quad P_2]\begin{bmatrix}\bar{x}_1(t)\\ \bar{x}_2(t)\end{bmatrix}=P\bar{x}(t)=x(t)\end{aligned} \tag{5.5.21}$$

下面推导获取$\hat{x}_2(t)$的方法。

由系统(5.5.19)得

$$\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{21}\bar{x}_1+\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{B}_2u \tag{5.5.22}$$

$$\dot{\bar{x}}_1=\bar{A}_{11}\bar{x}_1+\bar{A}_{12}\bar{x}_2+\bar{B}_1u \tag{5.5.23}$$

$$y=\bar{x}_1 \tag{5.5.24}$$

下面推导以$\bar{x}_2$ 为状态向量的系统的状态空间表达式。由式(5.5.22)得

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_2&=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{A}_{21}\bar{x}_1+\bar{B}_2u\\ &=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{A}_{21}y+\bar{B}_2u\\ &=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+[\bar{A}_{21}\quad \bar{B}_2]\begin{bmatrix}y\\ u\end{bmatrix}\\ &=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\widetilde{B}_2\tilde{u}\end{aligned} \tag{5.5.25}$$

这是状态向量$\bar{x}_2$ 对应的状态方程,$\tilde{u}$(即 y 和 u)是这个系统的外部输入。

由式(5.2.23)得

$$\dot{y}=\bar{A}_{11}y+\bar{A}_{12}\bar{x}_2+\bar{B}_1u \tag{5.5.26}$$

于是有

$$\bar{A}_{12}\bar{x}_2=\dot{y}-\bar{A}_{11}y-\bar{B}_1u=\tilde{y} \tag{5.5.27}$$

即

$$\tilde{y}=\bar{A}_{12}\bar{x}_2 \tag{5.5.28}$$

这是系统的输出方程。

现在的问题是:由 $\tilde{y}$,$\tilde{u}$,$\bar{A}_{22}$,$\widetilde{B}_2$,$\bar{A}_{12}$ 来渐近观测$\bar{x}_2$。根据振型判据可以证明:系统(C,A)能观测等价于系统$(\bar{A}_{12},\bar{A}_{22})$能观测。据此,可以对系统

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_2&=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\widetilde{B}_2\tilde{u}\\ \tilde{y}&=\bar{A}_{12}\bar{x}_2\end{aligned} \tag{5.5.29}$$

设计全维状态观测器，且可任意配置观测器极点。

设系统(5.5.29)的全维渐近观测器为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_2 &= (\bar{\boldsymbol{A}}_{22} - \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{A}}_{12})\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \widetilde{\boldsymbol{B}}_2\tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{y}} \\ &= (\bar{\boldsymbol{A}}_{22} - \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{A}}_{12})\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \widetilde{\boldsymbol{B}}_2\tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{L}(\dot{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u})\end{aligned} \tag{5.5.30}$$

为了消去$\dot{\boldsymbol{y}}(t)$(需要测量；即便可测量，也会放大 $\boldsymbol{y}(t)$中的高频噪声，不可靠)，引入变换

$$\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{x}}_2 - \boldsymbol{L}\boldsymbol{y} \tag{5.5.31}$$

于是有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}} &= (\bar{\boldsymbol{A}}_{22} - \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{A}}_{12})(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}) + \widetilde{\boldsymbol{B}}_2\tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{L}(-\bar{\boldsymbol{A}}_{11}\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u}) \\ &= (\bar{\boldsymbol{A}}_{22} - \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{A}}_{12})z + (\bar{\boldsymbol{A}}_{22} - \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{A}}_{12})Ly + \widetilde{\boldsymbol{B}}_2\tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{L}(-\bar{\boldsymbol{A}}_{11}\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u})\end{aligned} \tag{5.5.32}$$

回顾式(5.5.25)，有

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\tilde{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{21}\boldsymbol{y} + \bar{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{u} \tag{5.5.33}$$

所以

$$\dot{\boldsymbol{z}} = (\bar{\boldsymbol{A}}_{22} - \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{A}}_{12})\boldsymbol{z} + [(\bar{\boldsymbol{A}}_{22} - \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{A}}_{12})\boldsymbol{L} + \bar{\boldsymbol{A}}_{21} - \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{A}}_{11}]\boldsymbol{y} + (\bar{\boldsymbol{B}}_2 - \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{B}}_1)\boldsymbol{u} \tag{5.5.34}$$

这就是降维观测器的状态方程。

根据变换(5.5.31)可得

$$\hat{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y} \rightarrow \bar{\boldsymbol{x}}_2(t) \tag{5.5.35}$$

结合式(5.5.21)，得降维观测器的输出方程

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{L})\boldsymbol{y} \tag{5.5.36}$$

由于

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \\ &= \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ &\rightarrow \boldsymbol{P}_1\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2\bar{\boldsymbol{x}}_2 = [\boldsymbol{P}_1 \quad \boldsymbol{P}_2]\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{x}}_2\end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{5.5.37}$$

式(5.5.36)就是原系统的状态 $\boldsymbol{x}(t)$的渐近观测。

总结上述过程，降维观测器的设计的关键有两个：

(1) 设计原系统的可逆状态变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，进而算得观测器状态方程中的相关参数矩阵；

(2) 设计观测器增益矩阵 $\boldsymbol{L}$。

降维观测器的一个潜在缺点是抗噪声能力差：若系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$中包含噪声成分，则会通过式(5.5.36)直接进入状态的渐近估计。

除了对系统的状态向量进行渐近观测，也可以选择对状态变量的一个函数，如线性组合进行渐近观测，这就是函数观测器。针对状态反馈 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ 可以考虑函数观测器；针对系统的被控但不可测的输出，也可以设计函数观测器，这是无传感器控制的组成部分。函数观测器的特点是系统维数可以比降维观测器更低，但其维数的确定和设计方法都较为烦琐，这里不再详述。

最后需要指出，状态渐近观测的证明，都需要对观测器系统和原系统做差。若原系统参

数矩阵尤其是系统矩阵和控制矩阵存在参数摄动,则不能证明观测误差趋于零。因此状态渐近观测类似于解耦,对于系统参数摄动极其敏感。

5.6 基于观测器的状态反馈系统

观测器理论解决了系统的状态构造问题,从而使状态反馈成为一种可以实现的控制方式。本节讨论基于状态观测器的状态反馈系统和直接状态反馈系统的异同,并指出状态观测器的状态反馈本质上属于动态输出反馈。

5.6.1 闭环系统和分离原理

考虑线性定常控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5.6.1}$$

和状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \tag{5.6.2}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是 n 维状态向量,$\boldsymbol{u}(t)$是 p 维控制向量,$\boldsymbol{y}(t)$是 q 维输出向量,$\boldsymbol{v}(t)$是新的 p 维控制向量,$\boldsymbol{K}$ 是状态反馈增益。

控制律(5.6.2)和系统的闭环系统是

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5.6.3}$$

若状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$不能获取时,考虑建立其基本状态渐近观测器

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(t) \tag{5.6.4}$$

然后控制律(5.6.2)调整为

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{v}(t) \tag{5.6.5}$$

即用观测器$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$代替原系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$。

现在推导控制律(5.6.5)和系统(5.6.1)的闭环系统。

由式(5.6.1)得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}[-\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{v}(t)]\\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t)\end{aligned} \tag{5.6.6}$$

由式(5.6.4)得

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(t)\\ &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}[-\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{v}(t)] + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\\ &= \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t)\end{aligned} \tag{5.6.7}$$

于是可得闭环系统描述

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(t) \tag{5.6.8}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{0}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}(t)\end{bmatrix} \tag{5.6.9}$$

为了分析闭环系统(5.6.8)的极点，引入状态的可逆变换

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{E}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \bar{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix} \tag{5.6.10}$$

的变换后的闭环系统状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{v}(t) \tag{5.6.11}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{0}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix} \tag{5.6.12}$$

由能控性结构分解的知识可得，状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 可由输入 $\boldsymbol{v}(t)$ 控制，但 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 属于不可控状态。

式(5.6.11)表明，闭环系统的极点由系统(5.6.3)的极点和观测器(5.6.4)的极点组成，而且这两组极点互不影响。这就是分离原理。

利用分离原理可以分别设计系统的控制欲观测问题。先按照闭环动态要求，确定 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 的极点和 $\boldsymbol{K}$，再按照状态观测的动态要求确定 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}$ 的极点和观测器增益矩阵 $\boldsymbol{L}$。

这里分离原理是从基本观测器推导的。实际上，对于降维等任何一种状态观测器，分离原理都成立。

5.6.2　闭环系统的传递函数矩阵

考虑经可逆状态变换后的闭环系统状态空间描述式(5.6.11)～式(5.6.12)，其传递函数矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_B(s) &= [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{0}] \left\{ s \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{C}[s\boldsymbol{E}_n - (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})]^{-1}\boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{5.6.13}$$

这也正是变换系统(5.6.3)的传递函数矩阵。

5.6.3　基于观测器的反馈与动态输出反馈

先给出动态输出反馈的一般概念。考虑时变非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= f[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \\ \boldsymbol{y}(t) &= g[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \end{aligned} \tag{5.6.14}$$

$\boldsymbol{x}(t)$ 是 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 是已知的 p 维控制向量，$\boldsymbol{y}(t)$ 是 q 维可测输出向量。

动态输出反馈控制器具有如下结构：

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) &= \bar{f}[\bar{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{y}(t), t] \\ \boldsymbol{u}(t) &= \bar{g}[\bar{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{y}(t), t] \end{aligned} \tag{5.6.15}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ 是控制器的状态向量，原系统的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 是控制器系统的输入，而控制器的输出 $\boldsymbol{u}(t)$ 就是原系统所需的控制输入。

控制器系统中状态向量 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ 的维数，即积分器数目称为控制器的维数或阶次。当阶次为零即不包含积分器时，控制器就简化为静态输出反馈。

对于一般的时变非线性系统，没有涉及动态输出反馈(5.6.15)的一般方法。

若原系统为定常线性系统(5.6.1),则存在设计(5.6.15)的一般方法,为线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) &= \bar{\boldsymbol{A}}\,\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{y}(t)\\ \boldsymbol{u}(t) &= \bar{\boldsymbol{C}}\,\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{y}(t)\end{aligned} \tag{5.6.16}$$

但仅限控制器阶次等于原系统阶次的情况,即全维动态输出反馈。

对于降维或静态的输出反馈(意味着结构简单、成本低廉、可靠性高),即便原系统为线性定常的,也没有统一的设计方法。

按照动态输出反馈的一般概念,基于全维和降维观测器的状态反馈显然是动态输出反馈的一种特例。

基于观测状态进行系统设计,是状态渐近观测器的重要初衷之一,但是并非所有的系统设计工作都可以基于估计状态来进行。以本章前述的输入-输出解耦为例,显然包含了系统过渡过程的解耦。考虑到状态观测的误差在过渡过程中并不为零,立足于状态渐近观测器的输入-输出解耦在逻辑上是不成立的。另一方面,解耦有动态解耦和静态解耦的分类。静态解耦的设计,是可以基于状态渐近观测器来进行的。

5.7　系统镇定

一个非渐近稳定的控制系统,若在适当的反馈控制律的作用下对应的闭环系统为渐近稳定,则称该系统是可镇定的(stabilizable),相应控制律的设计问题称为镇定(stabilization)问题。

镇定问题只要求闭环极点被配置在左半复平面,无须指定具体的位置。这样的极点配置属于区域极点配置的一种,即将闭环极点配置在某个指定区域而不是一组具体的位置上。这里区域被选为左半复平面。

本节研究基于状态反馈和静态输出反馈的系统镇定问题。

状态反馈保持系统的能控性不变。这样,系统可以经状态反馈镇定的条件,是系统不能控部分的极点位于左半复平面。下面从能控性结构分解的角度讨论这一结论。

对于一个不能控的系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$,总可以通过适当的状态的可逆变换实现能控性分解,对应的系统矩阵和控制矩阵具有以下结构:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{5.7.1}$$

其中$(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{B}_1)$是能控子系统,$(\boldsymbol{A}_{22},\boldsymbol{0})$是不能控子系统。

把状态反馈增益矩阵表示为分块形式$\boldsymbol{K}=[\boldsymbol{K}_1\quad \boldsymbol{K}_2]$,则相应的闭环系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix} \tag{5.7.2}$$

属于上分块的三角矩阵。其特征多项式为

$$\begin{aligned}f(s) &= \det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\\ &= \det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1)\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_{22})\end{aligned} \tag{5.7.3}$$

其中$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1)$由于子系统$(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{B}_1)$能控可以通过选取$\boldsymbol{K}_1$使闭环极点位于左半复平面,同时$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_{22})$显然是状态反馈无法改变的。这样要实现系统的状态反馈镇定,充分必要条件就是$\boldsymbol{A}_{22}$的特征值都位于左半复平面,或说都具有负的实部、子系统$(\boldsymbol{A}_{22},0)$渐近稳定。

能控的系统必然可经状态反馈实现镇定；反之，可经状态反馈实现镇定的系统，却未必是能控的。

下面讨论基于静态输出反馈的系统镇定问题。

设系统$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$的能控能观测分解为

$$[\boldsymbol{C}_1 \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{C}_3 \quad \boldsymbol{0}],\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{24} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{33} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{44} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{5.7.4}$$

其中子系统$(\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{B}_1)$既能控又能观测，子系统$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}_{22},\boldsymbol{B}_2)$能控不能观测，子系统$(\boldsymbol{C}_3,\boldsymbol{A}_{33},\boldsymbol{0})$不能控能观测，子系统$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}_{44},\boldsymbol{0})$不能控不能观测。

设静态输出反馈增益矩阵为$\boldsymbol{F}$，则闭环系统矩阵为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{13}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{21}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{A}_{24} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{33} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{43} & \boldsymbol{A}_{44} \end{bmatrix} \tag{5.7.5}$$

对应的特征多项式为

$$\begin{aligned} f(s) &= \det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}) \\ &= \det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}_1)\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_{22})\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_{33})\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_{44}) \end{aligned} \tag{5.7.6}$$

因此，系统可经静态输出反馈实现镇定的充分必要条件为：能控能观测子系统可经静态输出反馈镇定，同时不能控和(或)不能观测子系统渐近稳定。

【例5.7.1】 设一个双输入单输出系统的参数矩阵为

设系统$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$的能控能观测分解为

$$\boldsymbol{C}=[0 \quad 0 \quad 1],\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2]=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.7.7}$$

系统具有能观测标准型，因而能观测。能控性判别矩阵

$$[\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}_1]=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{5.7.8}$$

和

$$[\boldsymbol{b}_2 \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2 \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}_2]=\begin{bmatrix} 0 & 5 & -25 \\ -2 & -1 & 10 \\ 1 & -5 & 14 \end{bmatrix} \tag{5.7.9}$$

都可逆。因此，每个输入变量都可以单独完全控制系统，系统能控。于是系统可经状态反馈任意配置闭环极点，当然可以状态反馈镇定。

设系统的静态输出反馈增益为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{5.7.10}$$

则闭环系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BFC}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 5+2a\\ 1 & 0 & -a+2b-1\\ 0 & 1 & -b-3\end{bmatrix} \tag{5.7.11}$$

对应的特征多项式为

$$\begin{aligned} f(s) &= \det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BFC}) \\ &= s^3+(b+3)s^2+(a-2b+1)s+(-2a-5) \end{aligned} \tag{5.7.12}$$

若取

$$a=-3,\quad b=-2 \tag{5.7.13}$$

则

$$f(s)=s^3+s^2+2s+1 \tag{5.7.14}$$

利用 Routh 判据或 Hurwitz 判据可知系统全部特征值都具有负的实部。因此,确实存在静态输出反馈使该系统实现镇定。

上述方法实际上是针对静态输出反馈的待定参数法。由于系统为单输出,所以特征多项式系数都是控制参数的一次函数。若系统为多输入-多输出,控制矩阵和输出矩阵的秩都严格大于1,则闭环特征多项式系数必定出现控制参数的2次或以上的乘方,难以进行后续分析。所以,这样的方法不具有一般性。

考虑特征多项式(5.7.12)。任意的极点对应任意的常数项、一次项和二次项系数,但这三个系数只包含两个控制参数。因此,这两个控制参数不可能实现任意的极点配置(三个方程两个未知数)。

5.8 针对系统外部扰动的控制律设计

外部扰动是环境对系统的影响。扰动有多种形式和分类。对扰动定位不同,处理方法也可能不同。

对于标量的扰动信号 w(若 $\boldsymbol{w}$ 为向量,道理类似),通常有以下几个认知角度:

(1) $w(t)$能否在线测量。

(2) $w(t)$的振型是否已知,或等价地说,其 Laplace 变换的分母是否已知。

(3) $w(t)$的振型已知的前提下,$w(t)$及其若干阶次的变化率$\dot{w}(t)$,$\ddot{w}(t)\cdots$是否可以在线测量。

(4) $w(t)$是否能量有界,即其 $\boldsymbol{L}_2$ 范数$\int_{t_0}^{T} w^2(t)\mathrm{d}t$ 是否是一个有限值?其中积分上限有时取为 $T=\infty$。正弦信号在 $T=\infty$时就不满足能量有界。

(5) $w(t)$的幅值是否有界,即$\max\limits_{t}|w(t)|$是否是一个有限值。如脉冲就不满足幅值有界。

(6) 若 w 是随机过程,其包含均值、方差在内的各阶矩是否已知。

若(1)成立,则可针对扰动信号在控制律中引入前馈补偿;

若(2)成立,则可按照内膜原理进行反馈设计,实现零静差;

若(3)成立,则可基于模型匹配针对扰动信号在控制律中引入前馈补偿;

若(4)成立,可以基于系统的 $\boldsymbol{L}_2$ 或 $\boldsymbol{H}_\infty$ 性能指标进行分析和设计,即优化输出与设定值误差的 $\boldsymbol{L}_2$ 范数;

若(5)成立,则可以考虑系统的 L_∞ 性能指标,即优化输出与设定值误差的幅值;

若(6)成立,比如 w 是白噪声,则可以进行鲁棒方差控制,即优化输出与设定值误差最为白噪声的方差。

本节仅在条件(1)～(3)下讨论针对扰动信号的控制律设计问题,如阶跃函数、斜坡函数、正弦函数等。这类扰动在实际系统中广泛存在,如雷达天线要在阵风干扰下准确指向目标,船体要抑制海浪造成的船体纵向或横向的摇摆,飞行器要克服气流的不利影响等等。扰动信号的函数形式(或振型),可以用分析或辨识的方法获得。

若扰动信号的函数形式已知,则总可以将其建模为某个自治动力学系统的输出信号,这个动力学系统与被控系统显然是串联关系。

各种设计的最终目标,都是使系统输出与设定值的误差能够抑制或消除扰动信号的影响,使其动态性能和静态性能满足预期要求。

本节内容包括调节器问题描述,闭环系统静态无差的条件,扰动信号可以测量和不可测量时的控制律设计。控制考虑状态反馈、前馈和状态以及扰动模型的观测器。

5.8.1　调节器问题

调节问题和随动跟踪问题是传统控制理论与工程的经典内容,如图 5.8.1 所示。

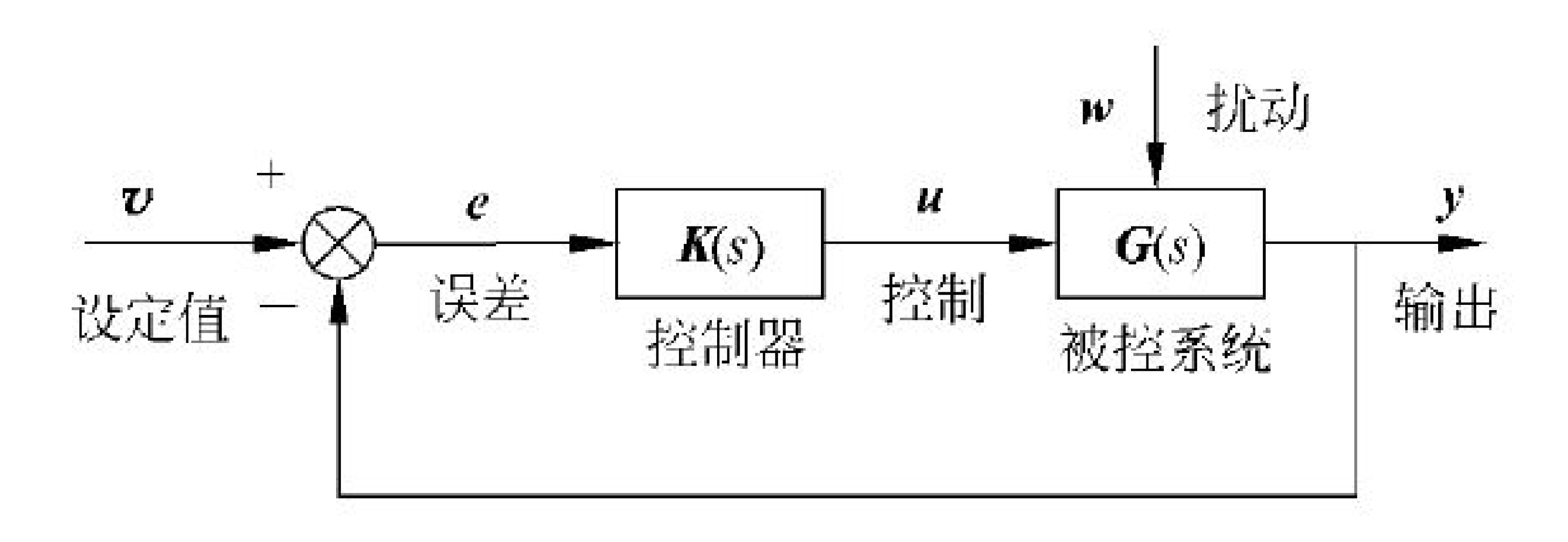


图 5.8.1　调节器问题

图中 $\boldsymbol{G}(s)$ 是被控系统 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的传递函数矩阵,$\boldsymbol{K}(s)$ 是控制器的传递函数矩阵,$\boldsymbol{y}$ 是被控的系统输出,$\boldsymbol{v}$ 是被控输出的设定值,$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}$ 是误差,$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 分别是作用于被控对象的控制输入和外部扰动输入。

问题的统一提法是：设计控制器 $\boldsymbol{K}(s)$,使得闭环系统稳定、具有满意的动态性能、实现零静差或静态误差满足要求。

若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$,就是要保证输出 $\boldsymbol{y}$ 不受扰动 $\boldsymbol{w}$ 的影响,称为调节问题；若 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$,就是要求输出 $\boldsymbol{y}$ 跟随设定值 $\boldsymbol{v}$ 变化,实现零静差或静差满足要求,称为跟踪问题。

在跟踪问题中,设定值 $\boldsymbol{v}$ 除了可测之外,和扰动 $\boldsymbol{w}$ 一样都是系统的外部量。这样,调节问题和跟踪问题的要求实际上是一致的,统称为调节器问题。

在图 5.8.1 中,设被控系统的状态空间描述为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}\tag{5.8.1}$$

扰动信号的状态空间描述为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}}_1(t) &= \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{z}_1(t)\\ \boldsymbol{w}(t) &= \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{z}_1(t)\end{aligned}\tag{5.8.2}$$

设定值的状态空间描述为

$$\dot{\boldsymbol{z}}_2(t)=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{z}_2(t)$$
$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{z}_2(t) \tag{5.8.3}$$

记

$$\boldsymbol{z}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_1(t)\\ \boldsymbol{z}_2(t)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{N}=[\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{D}_1\quad \boldsymbol{0}],\quad \boldsymbol{D}=[\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{D}_2] \tag{5.8.4}$$

则有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{N}\boldsymbol{z}(t)$$
$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}(t)$$
$$\boldsymbol{e}(t)=-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}(t) \tag{5.8.5}$$

设 $\boldsymbol{x}(t)$是 n 维的,外部信号状态 $\boldsymbol{z}(t)$是 p 维的,$\boldsymbol{u}(t)$是 l 维的,$\boldsymbol{e}(t)$是 m 维的。

在这个状态空间描述中,设定值与原来的系统输出的误差 $\boldsymbol{e}(t)$是输出,扰动信号与设定值统一建模为 $\boldsymbol{z}(t)$。调节器问题是指,设计一个以误差 $\boldsymbol{e}(t)$为输入的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_C(t)=\boldsymbol{A}_C\boldsymbol{x}_C(t)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{e}(t)$$
$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{F}_C\boldsymbol{x}_C(t)-\boldsymbol{F}_e\boldsymbol{e}(t) \tag{5.8.6}$$

使其与被控系统(5.8.1)组成的闭环系统渐近稳定,且

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{e}(t)=0 \tag{5.8.7}$$

系统(5.8.6)称为被控系统(5.8.1)的调节器。

注意,当讨论系统的渐近稳定时,要忽略系统的外部扰动输入,即假定 $\boldsymbol{N}\boldsymbol{z}(t)\equiv 0$。记

$$\boldsymbol{x}_L(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}_C(t)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_L=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_e\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_c\\ -\boldsymbol{H}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_C\end{bmatrix} \tag{5.8.8}$$

$$\boldsymbol{N}_L=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_e\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{D}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_L=[-\boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{0}],\quad \boldsymbol{D}_L=\boldsymbol{D} \tag{5.8.9}$$

则调节器(5.8.6)和被控系统(5.8.5)的闭环系统是

$$\dot{\boldsymbol{x}}_L(t)=\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{x}_L(t)+\boldsymbol{N}_L\boldsymbol{z}(t)$$
$$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{x}_L(t)+\boldsymbol{D}_L\boldsymbol{z}(t) \tag{5.8.10}$$

对于被控系统(5.8.1)和外部信号模型

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}(t) \tag{5.8.11}$$

有以下几点基本假设:

(1) 被控系统(5.8.11)能控且能观测。

(2) 输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 行满秩,意即各个输出分量之间线性独立。

(3) 若仅以 $\boldsymbol{e}(t)$零静差为目标,则可假设系统(5.8.11)中 $\boldsymbol{M}$ 的特征值实部非负。这是因为,具有负实部的振型其分量渐近趋于零,不会影响系统的静差。

下面推导闭环系统(5.8.10)零静差的条件。

对闭环系统的首要要求是渐近稳定,即 $\boldsymbol{x}_L(t)$的自由分量 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_L t}\boldsymbol{x}_L(0)$的静态值为零。

讨论误差 $\boldsymbol{e}(t)$的静态值,只需讨论外部信号状态 $\boldsymbol{z}(t)$(本质上是设定值和扰动)引起的 $\boldsymbol{x}_L(t)$的强制分量 $\tilde{\boldsymbol{x}}_L(t)$对 $\boldsymbol{e}(t)$的影响。

因为闭环系统渐近稳定,所以稳态阶段强制分量 $\tilde{\boldsymbol{x}}_L(t)$必为外部信号 $\boldsymbol{z}(t)$各个分量的线性组合。设稳态阶段

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_L(t) = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{z}(t) \tag{5.8.12}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是 $(n+q)\times p$ 常值矩阵。此时，误差

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(t) &= \boldsymbol{C}_L\boldsymbol{x}_L(t) + \boldsymbol{D}_L\boldsymbol{z}(t) \\ &= -\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{E}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{D}_L\boldsymbol{z}(t) \\ &= (\boldsymbol{D}_L - \boldsymbol{C}_L\boldsymbol{E})\boldsymbol{z}(t)\end{aligned} \tag{5.8.13}$$

由于外部信号状态 $\boldsymbol{z}(t)$ 取值的任意性，保证 $\boldsymbol{e}(t)$ 零静差的充分必要条件是

$$\boldsymbol{D}_L - \boldsymbol{C}_L\boldsymbol{E} = 0 \tag{5.8.14}$$

考虑系统(5.8.10)的状态方程。稳态阶段，有

$$\dot{\boldsymbol{x}}_L(t) = \boldsymbol{A}_L\tilde{\boldsymbol{x}}_L(t) + \boldsymbol{N}_L\boldsymbol{z}(t) \tag{5.8.15}$$

结合式(5.8.11)和式(5.8.12)，有

$$\boldsymbol{N}_L\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{A}_L\boldsymbol{E}\boldsymbol{z}(t) = -\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{z}}(t) = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}(t) \tag{5.8.16}$$

同样由于 $\boldsymbol{z}(t)$ 取值的任意性，式(5.8.16)等价于

$$\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}_L \tag{5.8.17}$$

式(5.8.17)为关于 $\boldsymbol{E}$ 的 Sylvester(西尔维斯特)方程，对任意的矩阵 $\boldsymbol{N}_L$，方程有唯一解的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}_L$ 和 $\boldsymbol{M}$ 没有相同的特征值。该方程提供了一种计算外部信号引起的系统强制状态响应分量的方法，即求得 $\boldsymbol{E}$ 后代入式(5.8.12)，而不必计算积分。

在系统渐近稳定的前提下($\boldsymbol{A}_L$ 的特征值都具有负实部)，式(5.8.14)和式(5.8.17)就是零静差的充分必要条件，其中式(5.8.14)称为输出条件，式(5.8.17)称为装置条件。

【例 5.8.1】 已知系统和外部信号模型如下：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_L(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_L(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t), \quad \boldsymbol{z}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.8.18}$$

求解系统的强制分量 $\tilde{\boldsymbol{x}}_L(t)$。

解：系统的特征多项式为

$$s^2 + 3s + 2 \tag{5.8.19}$$

特征值是$\{-1,-2\}$，所以系统渐近稳定。

外部模型的系统矩阵

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.8.20}$$

的特征值是$\{\pm \mathrm{j}\}$，与$\{-1,-2\}$没有重合的，因此对应的 Sylvester 方程

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \tag{5.8.21}$$

有唯一解。解得

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.8.22}$$

有外部模型得

$$\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{M}t}\boldsymbol{z}(0) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \tag{5.8.23}$$

因此,根据式(5.8.12),系统的强制状态分量为

$$\boldsymbol{x}_L(t)=-\boldsymbol{E}\boldsymbol{z}(t)=-\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix} \tag{5.8.24}$$

【例5.8.2】 已知系统和外部信号模型如下

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_L(t)&=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_L(t)+\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t)\\ \dot{\boldsymbol{z}}(t)&=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t)\\ \boldsymbol{e}(t)&=[1\quad 0]\boldsymbol{x}_L(t)+[1\quad 0]\boldsymbol{z}(t)\end{aligned} \tag{5.8.25}$$

证明该系统为零静差。

证明：各个参数矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}_L=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{N}_L=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t),\quad \boldsymbol{C}_L=[1\quad 0],\quad \boldsymbol{D}_L=[1\quad 0] \tag{5.8.26}$$

$\boldsymbol{A}_L$ 和 $\boldsymbol{M}$ 没有相同的特征值,对应的 Sylvester 方程有唯一解

$$\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix} \tag{5.8.27}$$

解得

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix} \tag{5.8.28}$$

同时,经计算得

$$\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{E}=[1\quad 0]\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}=[1\quad 0]=\boldsymbol{D}_L \tag{5.8.29}$$

输出条件和装置条件同时成立,因此系统为零静差。

5.8.2　外部信号状态可测量的控制律设计

在系统(5.8.5)中,若由系统状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 和外部信号状态 $\boldsymbol{z}(t)$ 组成扩张向量,可得如下扩张系统

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{z}}(t)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{e}(t)&=[-\boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{D}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.8.30}$$

在 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{z}(t)$ 都能在线测量的情况下,考虑扩张系统(5.8.30)的状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=-[\boldsymbol{F}_x\quad \boldsymbol{F}_z]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)\end{bmatrix}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{F}_z\boldsymbol{z}(t) \tag{5.8.31}$$

对应的闭环系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{z}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x&\boldsymbol{N}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_z\\ 0&\boldsymbol{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)\end{bmatrix}$$

$$e(t)=\begin{bmatrix}-C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix} \tag{5.8.32}$$

这里有一点需要说明：从形式上看，式(5.8.31)是扩张系统(5.8.30)的状态反馈控制律；但从物理意义上看，控制律中的$-F_x x(t)$是基于系统状态$x(t)$的反馈，而$-F_z z(t)$是基于外部信号状态$z(t)$的前馈。

以下分两种情况进行讨论。

(1) $D=0$，即外部信号的影响仅发生在状态方程中。

状态反馈增益矩阵F_x和F_z的设计方法如下：

① F_x必须保证闭环系统渐近稳定，且具有满意的动态性能，可以通过合理配置矩阵$(A-BF_x)$的特征值来实现。F_x称为镇定矩阵；

② F_z必须使得输出$e(t)$不受$z(t)$的影响，称为伺服矩阵。

由式(5.8.32)得

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=(A-BF_x)x(t)+(N-BF_z)z(t)\\ e(t)&=-Cx(t)\end{aligned} \tag{5.8.33}$$

从$z(t)$到$e(t)$的传递函数矩阵为

$$G(s)=-C[sE-(A-BF_x)]^{-1}(N-BF_z) \tag{5.8.34}$$

由矩阵知识可得

$$[sE-(A-BF_x)]^{-1}=\frac{E}{s}+\frac{A-BF_x}{s^2}+\frac{(A-BF_x)^2}{s^3}+\cdots \tag{5.8.35}$$

进而对矩阵$(A-BF_x)$应用 Cayley-Hamilton 定理，可得

$$\begin{aligned}&G(s)=0\\ \Leftrightarrow\ &C[(N-BF_z)\quad (A-BF_x)(N-BF_z)\quad \cdots\quad (A-BF_x)^{n-1}(N-BF_z)]=0\end{aligned} \tag{5.8.36}$$

进一步整理得，$G(s)=0$的充分必要条件是，

$$\begin{aligned}&C[B\quad (A-BF_x)B\quad \cdots\quad (A-BF_x)^{n-1}B]F_z\\ =\ &C[N\quad (A-BF_x)N\quad \cdots\quad (A-BF_x)^{n-1}N]\end{aligned} \tag{5.8.37}$$

根据线性方程组理论，若

$$\operatorname{rank}C[B\quad (A-BF_x)B\quad \cdots\quad (A-BF_x)^{n-1}B]=m \tag{5.8.38}$$

即行满秩，则系数矩阵的秩一定等于增广矩阵的秩。此时，伺服矩阵F_z作为方程组的解必然存在。注意到这样计算得出的F_z实际上不依赖于$z(t)$的具体表达形式。

(2) $D\neq 0$，即外部信号的影响同时出现在状态方程和误差中。

若$D\neq 0$，则(1)中的做法失效，但仍可以通过求解适当的矩阵方程组得到控制律，而且该方法也适用于$D=0$的情况。

控制律仍取式(5.8.31)，镇定矩阵F_x的设计原则不变；在此基础上，实现系统零静差的伺服矩阵F_z可由零静差条件(5.8.17)得出。此时，E是$n\times p$矩阵，装置条件为

$$N-BF_z=(A-BF_x)E-EM \tag{5.8.39}$$

所以

$$N=AE-EM+B(F_z-F_xE) \tag{5.8.40}$$

因此，在已经确定F_x的基础上，由式(5.8.40)可解得F_z。步骤如下：

① 判断系统(A,B)的能控性。若能控，进入下一步；否则终止。

② 求解关于未知 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{E}$ 和 $l\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的方程组

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{AE}-\boldsymbol{EM}+\boldsymbol{BQ}\\ \boldsymbol{D} &= -\boldsymbol{CE}\end{aligned}\tag{5.8.41}$$

③ 按照前述原则设计 $\boldsymbol{F}_x$。

④ 计算伺服矩阵

$$\boldsymbol{F}_z=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{E}\tag{5.8.42}$$

通过核对矩阵的阶数可知，若输入维数 l 大于等于输出维数 m，则方程组(5.8.41)中未知数个数 $n\times p+l\times p$ 大于等于方程的个数 $n\times p+m\times p$。

进一步，方程组(5.8.41)有唯一解的充分必要条件是，矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的特征值都不是系统 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的传输零点。注意到 $\boldsymbol{E}$ 的特征值是系统外部信号的振型，因此，系统要实现零静差，除了能控(输出反馈还要考虑能观测)的前提外，对外部信号与系统的“匹配”也是有客观要求的。

【例 5.8.3】 已知被控系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{bmatrix}-3 & 5\\ -4 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)+\begin{bmatrix}-5\\ 10\end{bmatrix}\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{e}(t) &= \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}\tag{5.8.43}$$

求形如(5.8.31)的控制律，是系统渐近稳定，且 $\boldsymbol{e}(t)$ 不受 $\boldsymbol{w}(t)$ 的影响，设 $\boldsymbol{w}(t)$ 为常值扰动。

解：本例中 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$。检验系统的能控性。

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 5 & 0\end{bmatrix}=2\tag{5.8.44}$$

系统能控。

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{AN}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-5 & 10\\ 65 & 20\end{bmatrix}=2\tag{5.8.45}$$

形式上表明，外扰信号可以完全“控制”两个状态变量，即外扰信号的确影响系统。进一步地，

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{AN}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 10\\ 65 & 20\end{bmatrix}\neq 0\tag{5.8.46}$$

表明外扰也确实影响误差 $\boldsymbol{e}(t)$。

设 $\boldsymbol{F}_x=\begin{bmatrix}f_1 & f_2\end{bmatrix}$。系统的闭环特征多项式为

$$s^2+(3-f_2)s+(20-5f_1-3f_2)\tag{5.8.47}$$

取 $f_1=0, f_2=-15$，则

$$\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}_x=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ -4 & -15\end{bmatrix}\tag{5.8.48}$$

特征值为 $\{-5,-13\}$，闭环系统渐近稳定。

进一步计算得

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{A}_L\boldsymbol{N}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 65\\ 10 & -130\end{bmatrix}=0\tag{5.8.49}$$

因此方程(5.8.37)的一个解是 $\boldsymbol{F}_z=0$。

再来考虑对应于矩阵方程组(5.8.41)的求解方法。此时 $\boldsymbol{F}_x$ 的设计方法不变。

由输出条件

$$\boldsymbol{CE}=[2\quad 1]\boldsymbol{E}=0 \tag{5.8.50}$$

得

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix} \tag{5.8.51}$$

其中 a 是待定参数。代入式(5.8.41)的第一个方程，得

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix}\boldsymbol{M}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{Q} \tag{5.8.52}$$

对于常值扰动 $\boldsymbol{w}(t)$，对应的 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$。解得 $a=5/13$，$\boldsymbol{Q}=150/13$。再由式(5.8.42)即可确定 $\boldsymbol{F}_z$。

以上两种方法有一个共同的缺陷：当系统参数矩阵有参数摄动时，不能保证零静差，方法失效。

5.8.3 外扰状态观测器

在扩张系统(5.8.30)中，若系统状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 和外部信号状态向量 $\boldsymbol{z}(t)$ 都不能直接测量，可已考虑为其设计状态观测器，

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t)\to\boldsymbol{x}(t),\quad \hat{\boldsymbol{z}}(t)\to\boldsymbol{z}(t) \tag{5.8.53}$$

进而考虑基于观测状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}(t)$ 的控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=-[\boldsymbol{F}_x\quad \boldsymbol{F}_z]\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(t) \\ \hat{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix}=-\boldsymbol{F}_x\hat{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{F}_z\hat{\boldsymbol{z}}(t) \tag{5.8.54}$$

$\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_z$ 按照 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{z}(t)$ 已知的情形进行设计。

扩张系统(5.8.30)的基本观测器为

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{z}}}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C} & \boldsymbol{N}-\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C} & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(t) \\ \hat{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)+\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{e}(t) \tag{5.8.55}$$

其中 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 观测器增益矩阵，按照观测器的动态性能要求设计。

这里面有一个渐近观测器是否存在的理论问题，即扩张系统中能否由误差 $\boldsymbol{e}(t)$ 渐近观测 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{z}(t)$。对于实际被控对象和外部信号 $\boldsymbol{z}(t)$，这个要求都能满足。

把控制律(5.8.54)代入观测器(5.8.55)，得基于误差 $\boldsymbol{e}(t)$ 的补偿器

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{z}}}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x & \boldsymbol{N}-\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_z \\ -\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C} & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(t) \\ \hat{\boldsymbol{z}}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{e}(t) \tag{5.8.56}$$

按照补偿器方程，通过在线积分运算得到 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}(t)$，就得到控制律(5.8.54)。

5.9 鲁棒调节器

5.8 节针对扰动的控制律设计假设被控系统模型精确已知。若系统的参数发生变化，就会导致系统参数矩阵的变化，进而导致无法精确抵消扰动的影响，不能实现零静差。本节讨论系统参数变化的前提下，闭环系统的稳定性、零静差特性的变化情况，以及如何保证这些性质不变。

在式(5.8.10)中，设闭环系统矩阵 $\boldsymbol{A}_L$ 的特征值都具有负实部。若系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和控制

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的元素发生变化,则会导致 $\boldsymbol{A}_L$ 发生变化:$\boldsymbol{A}_L \rightarrow \boldsymbol{A}_L + \delta\boldsymbol{A}_L$。若 $\boldsymbol{A}_L + \delta\boldsymbol{A}_L$ 的特征值仍都具有负实部,则称特征值都具有负实部这种性质对于 $\delta\boldsymbol{A}_L$ 或说系统参数变化是鲁棒的(Robust),或说具有鲁棒性(Robustness)。

由于系统的特征值连续依赖于系统的参数(可以理解为每个特征值都是系统参数的连续函数),且具有负实部的特征值显然与虚轴有一定距离,因此,只要系统参数变化足够小,总能保证特征值仍具有负的实部。这样看来,特征值都具有负实部这种性质对于 $\delta\boldsymbol{A}_L$ 一定是鲁棒的。这是一个定性的结论,至于定量的分析,即 $\boldsymbol{A}_L$ 具体的一组具有负实部的极点可以容许多大的参数变化,已有处理方法。

以上是系统参数变化对闭环系统稳定性的影响。

若系统的参数变化不影响系统的零静差特性,这时的控制器称为鲁棒调节器。上节的控制律(5.8.31)就不是鲁棒的。

鲁棒性是一个广泛存在的概念。数理统计中估计量的稳健性、微分方程的解对于初值的依赖性,本质上都是鲁棒性。

使系统镇定的控制律具有鲁棒性。

为了实现系统稳定性的极点配置显然具有鲁棒性。

为了保证系统动态性能的极点配置,由于性能指标连续依赖于控制参数和系统参数,实际上也具有鲁棒性。

状态渐近观测器对于系统参数变化一般来说没有鲁棒性(因为误差方程中体现参数变化的项无法处理以保证误差渐近为零)。

基于观测器的状态反馈镇定具有鲁棒性(因为闭环系统极点都具有负实部从而允许足够小的参数变化;虽然这时状态渐近观测并不成立)。

解耦控制不具有鲁棒性。

实际系统的参数变化广泛存在。可以想见,不具有鲁棒性的控制律实际上是无法应用的。以下讨论常值扰动下的鲁棒调节器,然后给出针对一般扰动的鲁棒调节器设计方法。

5.9.1 常值扰动的鲁棒调节器

回顾单输入-单输出控制系统,若系统存在常值扰动,且系统的设定值为常值。为使闭环系统零静差,通常采用 PI 调节,即针对误差 $e(t)$进行比例积分控制。系统在静态时,为了抵消常值扰动的影响并使系统输出为常值,控制输入也应为常值。由于 PI 调节器有积分作用项,有可能实现零静差,关键是在误差 $e(t)$的后面串联积分器作为控制器的一部分。

把以上思路用于多输入-多输出系统,此时误差 $\boldsymbol{e}(t)$为向量。在每个误差分量的后面串联积分器,可以产生抵消外扰的常值控制作用,且使每个静态误差分量为零。

回顾系统模型(5.8.5)。常值扰动对应误差 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$。将其重写如下:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{z}(t) \\ \dot{\boldsymbol{z}}(t) &= \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{e}(t) &= -\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{z}(t)\end{aligned} \tag{5.9.1}$$

在控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$中应有误差向量 $\boldsymbol{e}(t)$的积分项。设

$$\boldsymbol{q}(t) = \int_0^t \boldsymbol{e}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.9.2}$$

则有

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{e}(t) = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{z}(t) \tag{5.9.3}$$

与被控系统组成扩张系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t)$$

$$\boldsymbol{e}(t) = [-\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{0}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{z}(t) \tag{5.9.4}$$

设控制律为

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{F}_q\boldsymbol{q}(t) = -[\boldsymbol{F}_x \quad \boldsymbol{F}_q] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \end{bmatrix} \tag{5.9.5}$$

其中包含积分项 $\boldsymbol{F}_q\boldsymbol{q}(t)$。

在系统(5.9.1)中，输入 $\boldsymbol{u}(t)$是 l 维的，误差 $\boldsymbol{e}(t)$是 m 维的，扩张系统是 $n+m$ 维的。能控性判别矩阵是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{n+m-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n+m-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{CB} & -\boldsymbol{CAB} & & -\boldsymbol{CA}^{n+m-2}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n+m-1}\boldsymbol{B}) \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n+m-1}\boldsymbol{B}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n+m-1}\boldsymbol{B}) \\ \boldsymbol{E}_l & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.9.6}$$

在$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$能控的条件下，

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n+m-1}\boldsymbol{B}) \\ = &\operatorname{rank}(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}) \\ = &\ n \end{aligned} \tag{5.9.7}$$

因此，系统(5.9.1)能控即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}=n+m$ 的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = n+m \tag{5.9.8}$$

注意到式(5.9.8)中矩阵是 $n+m$ 行 $n+l$ 列的，条件成立的必要条件之一，是 $l \geqslant m$，物理意义为系统控制输入的维数不低于系统输出或误差的维数。

控制律(5.9.5)和系统(5.9.1)组成闭环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{q}}(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_L \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{N}_L\boldsymbol{z}(t)$$

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{C}_L \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}_L\boldsymbol{z}(t) \tag{5.9.9}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}_x & -\boldsymbol{BF}_q \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_L = [-\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{0}], \quad \boldsymbol{D}_L = \boldsymbol{D} \tag{5.9.10}$$

由于 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$,Sylvester 方程 $\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}_L$ 简化为 $\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{E}=\boldsymbol{N}_L$。因为闭环系统渐近稳定,所以 $\boldsymbol{A}_L$ 的特征值都具有负实部,一定可逆,由此解得 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{N}_L$。

另一方面,式(5.9.10)表明 Sylvester 方程 $\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{E}=\boldsymbol{N}_L$ 即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_q\\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{D}\end{bmatrix} \tag{5.9.11}$$

所以 $-\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}$,也就是说,装置条件本身包含了输出条件。至此,系统满足零静差的充分必要条件。

梳理上述分析,有

(1) 渐近稳定⇒装置条件⇒输出条件;

(2) 装置条件和输出条件⇔零静差;

(3) 渐近稳定具有鲁棒性。

所以,这里得到的零静差也是具有鲁棒性的。

因此系统存在鲁棒调节器

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{q}}(t)&=\boldsymbol{e}(t)\\ \boldsymbol{u}(t)&=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{F}_q\boldsymbol{q}(t)\end{aligned} \tag{5.9.12}$$

的充分必要条件为式(5.9.8)。$\boldsymbol{q}(t)$是误差 $\boldsymbol{e}(t)$的在线积分。若状态 $\boldsymbol{x}(t)$不能测量,则可用基于渐近观测器的估计状态代替。

【例 5.9.1】 考虑系统

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}f\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1(t)\\ \boldsymbol{e}_2(t)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}v\end{aligned} \tag{5.9.13}$$

其中,扰动 f 和设定值 v 都是阶跃函数。求闭环极点为{-1,-1,-2,-2}的鲁棒调节器。

解:首先检验鲁棒调节器的存在条件:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&2&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=4=2+2=n+m \tag{5.9.14}$$

所以条件成立。

由闭环极点{-1,-1,-2,-2}得对应的闭环特征多项式为

$$s^4+6s^3+13s^2+12s+4 \tag{5.9.15}$$

采用化多输入为单输入的极点配置方法,得到一组反馈增益矩阵

$$\boldsymbol{F}_x=\begin{bmatrix}16&-7\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_q=\begin{bmatrix}1&18\\0&-1\end{bmatrix} \tag{5.9.16}$$

再令

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1(t)\\ \boldsymbol{q}_2(t)\end{bmatrix}=\int_0^t\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1(\tau)\\ \boldsymbol{e}_2(\tau)\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau \tag{5.9.17}$$

则鲁棒调节器为

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}_1(t)\\ \dot{\boldsymbol{q}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1(t)\\ \boldsymbol{e}_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t)&=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{F}_q\boldsymbol{q}(t)\\&=-\begin{bmatrix}16&-7\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)-\begin{bmatrix}1&18\\0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)\end{aligned}\tag{5.9.18}$$

在本例 $\boldsymbol{u}(t)$的表达式中，也可以用误差 $\boldsymbol{e}(t)$代替状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$。请读者思考理由。

5.9.2 鲁棒调节器的频域性质

回顾系统(5.9.1)和鲁棒调节器(5.9.12)，有关信号的 Laplace 变换如下：

$$\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\tag{5.9.19}$$

$$\boldsymbol{u}(s)=-\frac{\boldsymbol{E}_m}{s}\boldsymbol{F}_q\boldsymbol{e}(s)\tag{5.9.20}$$

$$\boldsymbol{e}(s)=\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{y}(s)\tag{5.9.21}$$

记

$$\frac{\boldsymbol{R}_1(s)}{\phi(s)}=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)^{-1}\boldsymbol{B}\tag{5.9.22}$$

$$\frac{\boldsymbol{R}_2(s)}{\phi(s)}=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)^{-1}\boldsymbol{N}\tag{5.9.23}$$

其中 $\phi(s)$是矩阵$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)$的最小多项式，$\boldsymbol{R}_1(s)$和 $\boldsymbol{R}_2(s)$分别为 $m\times l$ 和 $m\times p$ 的多项式矩阵，元素的次数不超过 $\phi(s)$的次数。

由式(5.9.19)～式(5.9.23)可得

$$\boldsymbol{e}(s)=\left[D+\frac{\boldsymbol{R}_2(s)}{\phi(s)}\right]-\frac{\boldsymbol{R}_1(s)}{\phi(s)}\frac{\boldsymbol{E}_m}{s}\boldsymbol{F}_q\boldsymbol{e}(s)\tag{5.9.24}$$

两端同时乘以 $s\phi(s)$并整理，得

$$[s\phi(s)\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{R}_1(s)\boldsymbol{F}_q]\boldsymbol{e}(s)=[\phi(s)\boldsymbol{D}+\boldsymbol{R}_2(s)]s\boldsymbol{z}(s)\tag{5.9.25}$$

记

$$s\phi(s)\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{R}_1(s)\boldsymbol{F}_q=\frac{\boldsymbol{M}(s)}{d(s)}\tag{5.9.26}$$

则有

$$\boldsymbol{e}(s)=\frac{\boldsymbol{M}(s)}{d(s)}[\phi(s)\boldsymbol{D}+\boldsymbol{R}_2(s)]s\boldsymbol{z}(s)\tag{5.9.27}$$

其中 $d(s)$为从扰动 $\boldsymbol{z}(s)$到误差 $\boldsymbol{e}(s)$的传递函数矩阵的分母，即闭环系统的最小多项式。由于闭环系统渐近稳定，所以 $d(s)$的根都具有负实部，因而 $s/d(s)$不会发生零极相消。这样，扰动 $\boldsymbol{z}(s)$到误差 $\boldsymbol{e}(s)$的传递函数矩阵就有一个数值为零的零点，是由于引入积分器(5.9.20)而产生的。也就是说，鲁棒调节器

$$\boldsymbol{q}(s)=\frac{\boldsymbol{E}_m}{s}\boldsymbol{e}(s)\tag{5.9.28}$$

中数值为零的极点，变成了闭环系统的零点。

对于常值扰动向量 $\boldsymbol{z}(s)$，设其 Laplace 变换为

$$z(s)=\frac{1}{s}z_0 \tag{5.9.29}$$

z_0 为常值向量。代入式(5.9.27),零极相消之后有

$$e(s)=\frac{M(s)}{d(s)}[\phi(s)D+R_2(s)]z_0 \tag{5.9.30}$$

由终值定理得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}e(s)&=\lim_{s\to 0}se(s)\\&=\lim_{s\to 0}s\frac{M(s)}{d(s)}[\phi(s)D+R_2(s)]z_0\\&=0\end{aligned} \tag{5.9.31}$$

即零静差。

分析上述过程可知,由于 E_m/s 串联在 $e(s)$ 和 $z(s)$ 之间,在扰动 $z(s)$ 到误差 $e(s)$ 的传递函数矩阵就产生了和 E_m/s 的极点相同的零点;若 E_m/s 的极点和外部信号的振型一样,那么就造成式(5.9.27)中传递函数矩阵的零极相消,从而实现零静差。

对上述分析加以拓展,可设计出针对非常值扰动的鲁棒调节器。

5.9.3 一般鲁棒调节器的构造

设被控回顾系统、外扰模型和误差的状态空间描述为:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)+Nz(t)\\\dot{z}(t)&=Mz(t)\\e(t)&=Cx(t)+Dz(t)\end{aligned} \tag{5.9.32}$$

设其鲁棒调节器为

$$\begin{aligned}\dot{q}(t)&=A_q q(t)+B_q e(t)\\u(t)&=-F_x x(t)-F_q q(t)\end{aligned} \tag{5.9.33}$$

下面讨论控制参数矩阵 A_q,B_q,F_x,F_q 的设计方法。

设 p 阶外扰模型 $\dot{z}(t)=Mz(t)$ 中相同矩阵 M 的最小多项式为

$$\varphi(s)=s^r+a_{r-1}s^{r-1}+\cdots+a_1s+a_0 \tag{5.9.34}$$

其中 $r\leqslant p$。按照式(5.9.28)的思路,调节器(5.9.33)中 $e(t)$ 到 $q(t)$ 的传递函数矩阵应满足

$$q(s)=\frac{E_m}{\varphi(s)}e(s)=\frac{E_m}{s^r+a_{r-1}s^{r-1}+\cdots+a_1s+a_0}e(s) \tag{5.9.35}$$

即调节器包含 m 个子系统,等于误差的维数,每个子系统的传递函数是 $1/\varphi(s)$。

由此设

$$\dot{q}(t)=\begin{bmatrix}R&&\\&\ddots&\\&&R\end{bmatrix}q(t)+\begin{bmatrix}b&&\\&\ddots&\\&&b\end{bmatrix}e(t) \tag{5.9.36}$$

即

$$A_q=\begin{bmatrix}R&&\\&\ddots&\\&&R\end{bmatrix},\quad B_q=\begin{bmatrix}b&&\\&\ddots&\\&&b\end{bmatrix} \tag{5.9.37}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是 $r\times r$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 r 维列向量，且满足

$$[1\quad 0\quad \cdots\quad 0](s\boldsymbol{E}_r-\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{b}=1/\varphi(s) \tag{5.9.38}$$

$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的一种选取方法是

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{r-1} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.9.39}$$

这样构造的调节器参数矩阵，$\boldsymbol{A}_q$ 是 $mr\times mr$ 的，$\boldsymbol{B}_q$ 是 $mr\times m$ 的。

注意到 $\boldsymbol{e}(t)$ 的表达式，调节器(5.9.33)和被控系统的扩张系统是

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{q}}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_q\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)+\begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B}_q\boldsymbol{D} \end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t) \tag{5.9.40}$$

控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{F}_q\boldsymbol{q}(t)=-[\boldsymbol{F}_x\quad \boldsymbol{F}_q]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \end{bmatrix} \tag{5.9.41}$$

的设计原则，是使得闭环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{q}}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_q \\ \boldsymbol{B}_q\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{q}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B}_q\boldsymbol{D} \end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t) \tag{5.9.42}$$

渐近稳定，且具有满意的动态性能，前提是系统

$$\left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_q\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_q \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\right\} \tag{5.9.43}$$

能控。系统(5.9.40)能控的充分必要条件是，对于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_q$ 的任意特征值 λ，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}_n & 0 & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}_q\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_q-\lambda\boldsymbol{E}_{mr} & 0 \end{bmatrix}=n+mr \tag{5.9.44}$$

把 $\boldsymbol{A}_q$ 和 $\boldsymbol{B}_q$ 的表达式(5.9.37)代入(5.9.44)，可得系统(5.9.40)能控的充分必要条件是，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 能控，且对于 $\boldsymbol{R}$(或说 $\boldsymbol{A}_q$、$\boldsymbol{M}$)的任意特征值 λ，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}=n+m \tag{5.9.45}$$

对于常值扰动的情形，因为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$，特征值 $\lambda=0$。上述条件简化为式(5.9.8)。

条件(5.9.45)中的矩阵是 $(n+m)\times(n+l)$ 的。显然，条件成立的必要条件之一，是被控系统扩张输入的维数不小于输出的维数，即 $l\geqslant m$。

综上所述，系统(5.9.32)的鲁棒调节器(5.9.33)的设计可参照以下步骤进行：

(1) 检验系统 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 是否能控。若是，进行下一步，否则终止。

(2) 计算矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的最小多项式 $\varphi(s)$。

(3) 检验鲁棒调节器的存在条件(5.9.45)是否成立，若是进行下一步，否则终止。

(4) 按照式(5.9.37)～式(5.9.39)构造 $\boldsymbol{A}_q$ 和 $\boldsymbol{B}_q$。

(5) 按照闭环系统渐近稳定和动态性能要求设计 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_q$。

(6) 若系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 不能测量，且 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$ 能观测，构造 $\boldsymbol{x}(t)$ 的状态观测器，在调节器(5.9.33)中用观测状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 代替 $\boldsymbol{x}(t)$。

【例 5.9.2】 设计系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)+\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t)$$

$$\boldsymbol{e}(t)=[1\quad 0]\boldsymbol{x}(t)+[0\quad 1\quad -2]\boldsymbol{z}(t) \tag{5.9.46}$$

的鲁棒调节器,且使闭环极点实部不超过-0.5。

解:系统

$$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left\{[1\quad 0],\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\} \tag{5.9.47}$$

是能控能观测的。

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5.9.48}$$

的特征值是$\{0,\pm \mathrm{j}\}$,特征多项式和最小多项式都是

$$s(s^2+1)=s^3+s \tag{5.9.49}$$

检验系统能否零静差的条件:由于

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5.9.50}$$

其行列式为

$$1\times\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \tag{5.9.51}$$

所以对于$\boldsymbol{M}$的任何一个特征值,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=3=2+1=n+m \tag{5.9.52}$$

于是能够保证零静差。

本例中$r=3,m=1$。按照式(5.9.36)和式(5.9.39)设计鲁棒调节器状态方程

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{e}(t) \tag{5.9.53}$$

于是,对应的系统(5.9.42)是5阶的。

选取闭环系统极点$\{-1,-0.5\pm \mathrm{j},-2\pm \mathrm{j}\}$,对应的特征多项式为

$$(s+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)(s^2+4s+5)=s^5+6s^4+\frac{61}{4}s^3+\frac{81}{4}s^2+\frac{65}{4}s+\frac{25}{4} \tag{5.9.54}$$

设与式(5.9.33)中对应的

$$\boldsymbol{F}_x=[a_1\quad a_2],\quad \boldsymbol{F}_q=[a_3\quad a_4\quad a_5] \tag{5.9.55}$$

闭环系统矩阵为

$$\begin{bmatrix} A-BF_x & -BF_q \\ B_qC & A_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-a_1 & 1-a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.9.56}$$

特征多项式为

$$s^5+(a_2-1)s^4+a_1s^3+(a_2+a_5-1)s^2+(a_1-a_4-1)s+a_3 \tag{5.9.57}$$

令式(5.9.54)和式(5.9.57)对应系数相等，解得

$$F_x=\begin{bmatrix} \frac{61}{4} & 7 \end{bmatrix},\quad F_q=\begin{bmatrix} \frac{25}{4} & 2 & \frac{57}{4} \end{bmatrix} \tag{5.9.58}$$

本章小结

本章主要讨论了各种目标下的控制律设计问题，包括控制律的结构形式、极点配置，输入-输出解耦、线性二次型最优控制、状态观测器和基于观测器的状态反馈、镇定、针对外部干扰的控制和鲁棒调节器等内容。

系统设计的全部指标都是建立在稳定性基础之上的，离开稳态谈任何指标都毫无意义。因此，实现稳定性是系统设计的首要任务。

对于高阶次多变量控制系统，难以像一阶和二阶系统那样做到对性能指标的详细分析。二次型性能指标能够把快速性、平稳性、稳定性融为一体，通过适当的加权矩阵来保证闭环系统性能。此外，二次型性能指标的一个优势在于它不仅关注了传统的系统性能，同时也对控制能量和控制输入的幅值加以约束，符合控制工程的客观要求。

实际被控对象总是能控和能观测的。被控对象即便开环不稳定，也总能通过反馈实现稳定。所以，控制律的设计的宗旨，在于如何处理系统的外部信号，因为这些信号不可控，而其振型又必然影响系统输出与设定值之间的误差。从这个意义上说，线性系统设计的两大基本思路是内模原理(零极相消)和不变原理(设计控制律使外部干扰信号对跟踪误差的影响最小化或小于指定值)。针对外扰的控制律设计和鲁棒调节器的内容就是属于内模原理的，不变原理由于内容深度没有列出。

习题 5

5.1　判断系统能否用状态反馈任意配置极点。

(1) $\dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$

(2) $\dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}u$

(3) $\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}u$

5.2　给定控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

求状态反馈增益 $\boldsymbol{k}$,使得闭环极点为 $-2\pm \mathrm{j}$。

5.3　给定系统

$$g(s)=\frac{1}{s(s+4)(s+8)}$$

求系统的能控型状态空间描述,并求状态反馈增益 $\boldsymbol{k}$,使得闭环极点为 $\{-1,-2,-7\}$。

5.4　给定控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

用待定参数法求输出反馈增益 $\boldsymbol{F}$,使得闭环极点为 $\{-2,-4\}$。

5.5　给定控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

是否存在状态反馈增益 $\boldsymbol{k}$,把闭环极点配置到以下位置:

(1) $\{-2\}$,4 重

(2) -3,3 重,-2

(3) $\{-3\}$,4 重

5.6　给定控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

求两个不同的状态反馈增益,把闭环极点配置到 $\{-2,-1\pm \mathrm{j}2\}$。

5.7　给定控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

求两个不同的状态反馈增益,把闭环极点配置到 $\{-2\pm \mathrm{j}3,-5\pm \mathrm{j}6\}$。

5.8　给定系统

$$g(s)=\frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s-2)(s+4)}$$

是否存在状态反馈,把闭环传递函数变为

$$\bar{g}(s)=\frac{s+3}{(s+2)(s+4)}$$

5.9 给定控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

求状态反馈,使闭环系统矩阵相似于

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\3&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$$

5.10 判断系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

能否通过状态反馈实现积分型解耦。

5.11 判断系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&3\\1&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

能否通过状态反馈实现积分型解耦;若能,求解相应的控制律。

5.12 给定控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

和二次型性能指标

$$J=\int_0^{\infty}(2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+\boldsymbol{u}^2)\mathrm{d}t$$

求解最优控制律和最优性能指标值。

5.13 给定控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

和二次型性能指标

$$J=\int_0^{\infty}(\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{u}^2)\mathrm{d}t$$

求解最优控制律和最优性能指标值。

5.14 给定控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

求极点为{−2±j}的基本观测器和极点为{−3}的降维观测器。

5.15　给定控制系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

求极点为{−3,−3,−4}的基本观测器和极点为{−3,−4}的降维观测器。

第6章

离散系统的分析与设计

伴随着系统理论研究领域的扩展和计算机技术的普及,离散时间系统(以下简称离散系统)已经成为系统和控制理论中的一类主要研究对象。离散系统代表了社会、经济、工程等领域中一大批离散的动力学问题的数学模型,同时也涵盖了连续系统的离散化模型。离散系统的大多数结论与连续系统是平行的,但在系统辨识和自适应控制等领域中,离散系统的研究较之于连续系统更为普遍和深入。

本章从状态空间描述、状态响应、能控能观测、稳定性、控制律设计和观测器几个角度简述离散系统。应该指出,离散系统的结论并不总是类似于连续系统。

6.1 离散系统的状态空间描述

类似于连续系统,离散系统也有多种模型表达方式,包括高阶差分方程、传递函数和状态空间描述。本章主要讨论离散系统的状态空间描述。

一个一般的离散非线性时变系统可以用以下模型来表示:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1[x_1(k),\cdots,x_n(k),u_1(k),\cdots,u_r(k),k] \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= f_n[x_1(k),\cdots,x_n(k),u_1(k),\cdots,u_r(k),k] \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

$$\begin{aligned} y_1(k) &= g_1[x_1(k),\cdots,x_n(k),u_1(k),\cdots,u_r(k),k] \\ &\vdots \\ y_m(k) &= g_n[x_1(k),\cdots,x_n(k),u_1(k),\cdots,u_r(k),k] \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

$$x_1(k_0) = x_1,\cdots,x_n(k_0) = x_n \tag{6.1.3}$$

其中,$k \geqslant k_0$ 为离散时间,k_0 为初始时刻,$x_1(k),\cdots,x_n(k)$为状态变量,n 为系统的阶次,$u_1(k),\cdots,u_r(k)$为系统的输入变量,r 为输入维数,$y_1(k),\cdots,y_m(k)$为系统的输出变量,m 为输出维数。

差分方程(6.1.1)称为系统的状态方程,式(6.1.2)称为系统的输出方程,式(6.1.3)称为系统的初始条件。

若定义

$$\boldsymbol{x}(k)=\begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}(k)=\begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_r(k) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}(k)=\begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{g}=\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6.1.4}$$

则状态方程、输出方程和初始条件分别简记为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] \tag{6.1.5}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] \tag{6.1.6}$$

$$\boldsymbol{x}(k_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{6.1.7}$$

若 f_i、g_i 都是 x_i、u_i 的线性函数,即

$$f_i=a_{i1}(k)x_1(k)+\cdots+a_{in}(k)x_n(k)+b_{i1}u_1(k)+\cdots+b_{ir}u_r(k) \tag{6.1.8}$$

$$g_i=c_{i1}(k)x_1(k)+\cdots+c_{in}(k)x_n(k)+d_{i1}u_1(k)+\cdots+d_{ir}u_r(k) \tag{6.1.9}$$

则简化为时变的线性系统。记

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(k)&=\begin{bmatrix}a_{11}(k)&\cdots&a_{1n}(k)\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}(k)&\cdots&a_{nn}(k)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}(k)=\begin{bmatrix}b_{11}(k)&\cdots&b_{1r}(k)\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}(k)&\cdots&b_{nr}(k)\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{C}(k)&=\begin{bmatrix}c_{11}(k)&\cdots&c_{1n}(k)\\\vdots&&\vdots\\c_{m1}(k)&\cdots&c_{mn}(k)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}(k)=\begin{bmatrix}d_{11}(k)&\cdots&d_{1r}(k)\\\vdots&&\vdots\\d_{m1}(k)&\cdots&d_{mr}(k)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

得线性系统的模型

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{6.1.11}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{6.1.12}$$

其中参数矩阵 $\boldsymbol{A}(k)$,$\boldsymbol{B}(k)$,$\boldsymbol{C}(k)$,$\boldsymbol{D}(k)$的名称、功能与连续系统的情形相同。

若矩阵 $\boldsymbol{A}(k)$,$\boldsymbol{B}(k)$,$\boldsymbol{C}(k)$,$\boldsymbol{D}(k)$的各个元素实际上都与时间 k 无关,则系统进一步简化为离散定常线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \tag{6.1.13}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \tag{6.1.14}$$

系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值称为系统的特征值或极点。

基于定常系统(6.1.13)~(6.1.14)的参数矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}$ 函数矩阵

$$\boldsymbol{G}(z)=\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \tag{6.1.15}$$

称为输入 $\boldsymbol{u}(k)$到输出 $\boldsymbol{y}(k)$的传递函数矩阵。

一个连续线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t) \tag{6.1.16}$$

在周期为常数 T 的等间隔采样、T 满足 Shannon 采样定理和零阶保持器的前提下,对应的离散化系统为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(k)+\left(\int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{d}t\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{u}(k) \tag{6.1.17}$$

其中,

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T},\quad \int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{d}t\boldsymbol{B} \tag{6.1.18}$$

分别为离散化系统的系统矩阵和输入矩阵。这样,借助于矩阵指数的计算和积分计算,就能得到离散化系统的状态空间描述。

因为矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}$ 总是可逆的,所以离散化系统的系统矩阵总是可逆的。这一点不同于一般的离散系统。

6.2 离散线性系统的状态响应

本节考虑离散时变线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{6.2.1}$$

和离散定常线性系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{6.2.2}$$

在任意时刻 $k\geqslant 0$ 的状态向量 $\boldsymbol{x}(k)$ 的取值，即状态响应。

由于离散系统的状态方程是基于初始条件的递推关系，因此理论上可以直接根据任一时刻状态向量的值递推得到下一时刻状态向量的取值。当然这样做有一个明显的不足之处，即容易造成误差的积累。因此，有必要讨论其他的状态响应获取方法。

时变矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(k,m)=\boldsymbol{A}(k-1)\boldsymbol{A}(k-2)\cdots\boldsymbol{A}(m+1)\boldsymbol{A}(m),\quad k>m \tag{6.2.3}$$

和

$$\boldsymbol{\Phi}(k-m)=\boldsymbol{A}^{k-m},\quad k>m \tag{6.2.4}$$

分别称为时变系统(6.2.1)和定常系统(6.2.2)的状态转移矩阵。注意式(6.2.3)中矩阵乘积的顺序。

状态转移矩阵定义中 $k>m$ 的条件只是对应“初始时刻在前，其他时刻在后”的常规时间顺序。在一些理论研究中，由于初始时刻不是绝对的，$k<m$ 也是允许的。

此外，为了便于记述，针对系统为时变和定常的不同情形，分别定义

$$\boldsymbol{\Phi}(k,k)=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E} \tag{6.2.5}$$

连续线性系统的状态转移矩阵作为矩阵指数总是可逆的。与此不同的是，离散线性系统的状态转移矩阵，由于是一系列系统矩阵的乘积，可能出现不可逆的情况。这一点从根本上决定了离散系统的某些结论并非完全平行于连续系统。

依据离散时变线性系统的状态方程(6.2.1)，可得系统的状态响应表达式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)=&\boldsymbol{A}(k-1)\cdots\boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{x}(0)+\\&\boldsymbol{A}(k-1)\cdots\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{u}(0)+\\&\boldsymbol{A}(k-1)\cdots\boldsymbol{A}(2)\boldsymbol{B}(1)\boldsymbol{u}(1)+\cdots+\\&\boldsymbol{A}(k-1)\boldsymbol{B}(k-2)\boldsymbol{u}(k-2)+\\&\boldsymbol{B}(k-1)\boldsymbol{u}(k-1)\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

结合状态转移矩阵的概念(6.2.3)和(6.25)，分别有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(k,0)=\boldsymbol{A}(k-1)\cdots\boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{x}(0)\\&\boldsymbol{\Phi}(k,1)=\boldsymbol{A}(k-1)\cdots\boldsymbol{A}(1)\\&\boldsymbol{\Phi}(k,2)=\boldsymbol{A}(k-1)\cdots\boldsymbol{A}(2)\\&\qquad\vdots\\&\boldsymbol{\Phi}(k,k-1)=\boldsymbol{A}(k-1)\\&\boldsymbol{\Phi}(k,k)=\boldsymbol{E}_n\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

于是状态响应(6.2.6)可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)=&\boldsymbol{\Phi}(k,0)\boldsymbol{x}(0)+\\&\boldsymbol{\Phi}(k,1)\boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{u}(0)+\\&\boldsymbol{\Phi}(k,2)\boldsymbol{B}(1)\boldsymbol{u}(1)+\cdots+\\&\boldsymbol{\Phi}(k,k-1)\boldsymbol{B}(k-2)\boldsymbol{u}(k-2)+\\&\boldsymbol{\Phi}(k,k)\boldsymbol{B}(k-1)\boldsymbol{u}(k-1)\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

状态响应(6.2.8)分为

$$\boldsymbol{\Phi}(k,0)\boldsymbol{x}(0) \tag{6.2.9}$$

和

$$\boldsymbol{\Phi}(k,1)\boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{u}(0)+\cdots+\boldsymbol{\Phi}(k,k)\boldsymbol{B}(k-1)\boldsymbol{u}(k-1) \tag{6.2.10}$$

两部分。类似于连续系统,式(6.2.9)为初态 $\boldsymbol{x}(0)$引起的自由响应,式(6.2.10)为输入信号引起的强迫响应。

根据以上讨论,定常离散线性系统(6.2.2)作为时变离散线性系统(6.2.1)的特例,其状态响应为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)=&\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)+\\&\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{u}(0)+\\&\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{B}(1)\boldsymbol{u}(1)+\cdots+\\&\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}(k-2)\boldsymbol{u}(k-2)+\\&\boldsymbol{B}(k-1)\boldsymbol{u}(k-1)\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

结合定常离散线性系统的状态转移矩阵,状态响应可表为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)=&\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\\&\boldsymbol{\Phi}(k-1)\boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{u}(0)+\\&\boldsymbol{\Phi}(k-2)\boldsymbol{B}(1)\boldsymbol{u}(1)+\cdots+\\&\boldsymbol{\Phi}(1)\boldsymbol{B}(k-2)\boldsymbol{u}(k-2)+\\&\boldsymbol{\Phi}(0)\boldsymbol{B}(k-1)\boldsymbol{u}(k-1)\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0) \tag{6.2.13}$$

为初态 $\boldsymbol{x}(0)$引起的自由响应,而

$$\boldsymbol{\Phi}(k-1)\boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{u}(0)+\cdots+\boldsymbol{\Phi}(0)\boldsymbol{B}(k-1)\boldsymbol{u}(k-1) \tag{6.2.14}$$

为输入信号引起的强迫响应。

6.3 离散系统的能控性和能观测性

相比于连续系统,离散控制系统的能控性和能观测性在概念上只是用离散时间替换连续时间,没有其他区别;但就判别条件而言,由于离散控制系统的状态转移矩阵未必可逆,所以条件存在细微区别。

对于离散控制系统

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{k}],\quad k\geqslant k_0\\\boldsymbol{y}(k)&=g[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k]\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

(1) 选取控制输入 $\boldsymbol{u}(k_0),\boldsymbol{u}(k_0+1),\cdots$序列把 k_0 时刻的非零初态 $\boldsymbol{x}(k_0)$精确转移到状态空间原点的可行性称为能控性;

(2) 选取控制输入 $\boldsymbol{u}(k_0),\boldsymbol{u}(k_0+1),\cdots$序列把 k_0 时刻的状态从原点转精确移到非零状态 $\boldsymbol{x}(k_0)$的可行性称为能达性(reachability);

(3) 根据输出 $\boldsymbol{y}(k_0),\boldsymbol{y}(k_0+1),\cdots$和控制输入 $\boldsymbol{u}(k_0),\boldsymbol{u}(k_0+1),\cdots$唯一确定初态 $\boldsymbol{x}(k_0)$的可行性称为能观测性。

由以上三个概念可进一步衍生出离散系统能控、能达和能观测的概念。

对于连续线性系统，能控和能达是等价的，即能控必能达，反之亦然；但对于离散线性系统，二者等价的充分必要条件是，所涉时间段内的系统矩阵都是可逆的，或者说状态转移矩阵是可逆的。

下面就时变和定常的离散系统

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k), \quad k \geqslant k_0 \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

和

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k), \quad k \geqslant k_0 \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

给出能控和能观测的判据。在叙述能控性判据时，设系统矩阵都是可逆的。

定理 6.3.1　(Gram 矩阵判据)离散系统(6.3.2)在 k_0 时刻能控的充分必要条件是，存在有限时刻 $l>k_0$，使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{G}(k_0,l)=\sum_{k=k_0}^{l-1}\left[\boldsymbol{\Phi}(k_0,k+1)\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(k_0,k+1)\right] \tag{6.3.4}$$

可逆，其中$\boldsymbol{\Phi}(k_0,k+1)$为系统的状态转移矩阵。

将时变系统的状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(k_0,k+1)$和控制矩阵 $\boldsymbol{B}(k)$分明别替换为定常系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{A}^{k_0-(k+1)}$ 和控制矩阵 $\boldsymbol{B}$，就得到定常系统能控性的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{G}(l-k_0)=\sum_{k=k_0}^{l-1}\left[\boldsymbol{A}^{k_0-(k+1)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{k_0-(k+1)}\right] \tag{6.3.5}$$

定常离散系统 Gram 矩阵的可逆性与$(l-k_0)$有关，不依赖于具体的 k_0 时刻。

与定常连续线性系统类似，定常离散线性系统(6.3.3)也有能控性的秩判据、PBH 振型判据、PBH 特征向量判据和 Jordan 标准型判据，且表述一致，但条件为充分必要的前提是系统矩阵不可逆。

【例 6.3.1】　考虑二阶系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k), \quad k \geqslant 0 \tag{6.3.6}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \tag{6.3.7}$$

设系统的初态为

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}b\\ a\end{bmatrix} \tag{6.3.8}$$

状态方程(6.3.6)可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1(k+1) &= 0\times\boldsymbol{x}_1(k)+2\times\boldsymbol{x}_2(k)+1\times\boldsymbol{u}(k)=2\boldsymbol{x}_2(k)+\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{x}_2(k+1) &= 0\times\boldsymbol{x}_1(k)+0\times\boldsymbol{x}_2(k)+0\times\boldsymbol{u}(k)=0 \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

取控制输入为

$$\boldsymbol{u}(0)=-2a \tag{6.3.10}$$

则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1(1) &= 2\boldsymbol{x}_2(0) + \boldsymbol{u}(0) = 2a - 2a = 0 \\ \boldsymbol{x}_2(1) &= 0 \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

即对任意的初态(6.3.8),存在控制输入(6.3.10)将状态转移至原点,系统能控。

另一方面,显然有

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2 \tag{6.3.12}$$

判别矩阵$[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB}]$并不满秩。

此例中,系统能控但判别矩阵并不满秩,根本原因在于,系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆的。

实际上,若没有系统矩阵可逆的前提,则 Gram 矩阵判据、秩判据、PBH 振型判据、PBH 特征向量判据和 Jordan 标准型判据仅为系统能控的充分条件。

下面来看离散系统的能观测性,这里不需要系统矩阵可逆的条件。

定理 6.3.2 (Gram 矩阵判据)离散系统(6.3.2)在 k_0 时刻能观测的充分必要条件是,存在有限时刻 $l > k_0$,使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{G}(k_0, l) = \sum_{k=k_0}^{l-1} [\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(k+1, k_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{\Phi}(k+1, k_0)] \tag{6.3.13}$$

可逆,其中$\boldsymbol{\Phi}(*, *)$为系统的状态转移矩阵。

定常系统的能观测性 Gram 矩阵为

$$\boldsymbol{G}(l - k_0) = \sum_{k=k_0}^{l-1} [(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{k+1-k_0}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k+1-k_0}] \tag{6.3.14}$$

定常离散系统 Gram 矩阵的可逆性与$(l - k_0)$有关,不依赖于具体的 k_0 时刻。

与定常连续线性系统类似,定常离散线性系统(6.3.3)也有能观测性的秩判据、PBH 振型判据、PBH 特征向量判据和 Jordan 标准型判据,且表述形式相同。

6.4 离散系统的 Lyapunov 稳定性

本节考虑 n 阶离散自治系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = f[\boldsymbol{x}(k), k], \quad k \geqslant k_0, \quad \boldsymbol{x}(k_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{6.4.1}$$

的 Lyapunov 稳定性问题。

对于任意离散时间 k,满足方程

$$\boldsymbol{x}_e = f[\boldsymbol{x}_e, k] \tag{6.4.2}$$

的 n 维常值向量 $\boldsymbol{x}_e$ 称为离散系统(式 6.4.1)的平衡状态,或平衡点。

根据式(6.4.2),一旦状态 $\boldsymbol{x}(k)$ 在某个离散时刻 k_1 到达平衡点 $\boldsymbol{x}_e$,则对于任意的 $k \geqslant k_1$,总有 $\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}_e$。

确定系统平衡点,本质上就是求解关于 $\boldsymbol{x}_e$ 的方程(组)(式 6.4.2)。若平衡点 $\boldsymbol{x}_e \neq 0$,总可以通过坐标平移使得原点 $\boldsymbol{x} = 0$ 成为平衡点。类似于连续的情形,这里只讨论孤立平衡点的稳定性问题。

离散系统的 Lyapunov 稳定性概念,如稳定、渐近稳定、全局性、一致性、指数稳定和线性化和吸引区等,除了用离散时间替换连续时间外,没有区别,这里不再一一详述。

下面考虑 n 阶离散定常自治系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = f[\boldsymbol{x}(k)], \quad k \geqslant k_0, \quad \boldsymbol{x}(k_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{6.4.3}$$

的 Lyapunov 稳定性问题，设 $\boldsymbol{x}=0$ 是其平衡点。

定理 6.4.1　对于定常系统(6.4.3)，若存在多元函数

$$V[\boldsymbol{x}(k)]=V[\boldsymbol{x}_1(k),\cdots,\boldsymbol{x}_n(k)] \tag{6.4.4}$$

满足：

① $V(\boldsymbol{x})$在包含原点的区域 $\boldsymbol{D}_1$ 上正定；

② $\Delta V[\boldsymbol{x}(k)]=V[\boldsymbol{x}(k+1)]-V[\boldsymbol{x}(k)]$在包含原点的区域 $\boldsymbol{D}_2$ 上负定；或 $\Delta V[\boldsymbol{x}(k)]$在区域 $\boldsymbol{D}_2$ 上半负定，但不恒为零；

③ $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V[\boldsymbol{x}(k)]=\infty$；

则有以下结论：

(1) ①+②⇒原点局部渐近稳定；

(2) 若 $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{R}^n$ 即全空间，则①+②+③⇒原点全局渐近稳定。

类似于连续系统的 Lyapunov 稳定性，这里的 $V(x)$实际上构造了 n 维状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种长度规则。由于 ΔV 负定，按照这个规则长度是递减的，且趋于零。对于一般的非线性系统，没有构造 $V(\boldsymbol{x})$的统一方法。

若状态方程(6.4.3)满足

$$\| f[\boldsymbol{x}(k)] \| \leqslant \| \boldsymbol{x}(k) \| \tag{6.4.5}$$

或等价地写为

$$f_1^2(k)+\cdots+f_n^2(k)<x_1^2(k)+\cdots+x_n^2(k) \tag{6.4.6}$$

此时，考虑直观的 $V(\boldsymbol{x})$选取方式

$$V[\boldsymbol{x}(k)]=\|\boldsymbol{x}(k)\|^2=x_1^2(k)+\cdots+x_n^2(k) \tag{6.4.7}$$

结合状态方程(6.4.3)，有

$$\begin{aligned}\Delta V &=V[\boldsymbol{x}(k+1)]-V[\boldsymbol{x}(k)]\\ &=[f_1^2(k)+\cdots+f_n^2(k)]-[x_1^2(k)+\cdots+x_n^2(k)]\\ &<0\end{aligned} \tag{6.4.8}$$

于是根据定理 6.4.1 可知原点局部是渐近稳定的。

时变的离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=f[\boldsymbol{x}(k),k],\quad k\geqslant k_0,\quad \boldsymbol{x}(k_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{6.4.9}$$

的 Lyapunov 稳定性讨论类似于连续情形，为了得到一致渐近稳定的结论，需要为构造的函数 $V[\boldsymbol{x}(k),k]$找到不显含时间 k 的上下界函数 $V_1[\boldsymbol{x}(k)]$和 $V_2[\boldsymbol{x}(k)]$，同时为 $\Delta V[\boldsymbol{x}(k),k]$找到不显含时间 k 的下界函数 $V_3[\boldsymbol{x}(k)]$。显然，此时也没有构造 $V[\boldsymbol{x}(k),k]$的统一方法。

离散线性定常系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k),\quad k\geqslant k_0,\quad \boldsymbol{x}(k_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{6.4.10}$$

存在如下的稳定性判别结论。

定理 6.4.2　对离散线性定常系统(6.4.10)，平衡点 $\boldsymbol{x}_e=0$ 渐近稳定的充分必要条件是，对任意对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，以下离散型 Lyapunov 方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=0 \tag{6.4.11}$$

有唯一对称、正定的解矩阵 $\boldsymbol{P}$。

证明过程可以基于定理 6.4.1 结合 $V[\boldsymbol{x}(k)]=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{x}(k)$给出。

式(6.4.11)实际上是关于矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的元素的线性方程组，相关解读类似于连续的

Lyapunov 方程。

离散系统(6.4.10)渐近稳定的充分必要条件是,系统的极点都在单位圆内部,即

$$|\lambda_i(\boldsymbol{A})| < 1 \tag{6.4.12}$$

对于给定的正数 σ,若要判断

$$|\lambda_i(\boldsymbol{A})| < \sigma \tag{6.4.13}$$

是否成立,可以通过修正的离散型 Lyapunov 方程来实现:

定理 6.4.3　$|\lambda_i(\boldsymbol{A})| < \sigma$ 的充分必要条件是,对任意对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$,以下离散型 Lyapunov 方程

$$\sigma^{-2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = 0 \tag{6.4.14}$$

有唯一对称、正定的解矩阵 $\boldsymbol{P}$。

注意式(6.4.14)中 σ 的指数为 -2,不是 2。读者可以通过一阶系统来简单验证。

离散非线性系统的局部稳定性、吸引区估计也可以借助于平衡点处系统的线性化系统来进行,类似于连续的情形,不再详述。

6.5　离散线性系统的设计

离散系统的设计问题包括极点配置、反馈镇定、二次型最优控制、状态观测器和基于观测器的反馈控制等内容。

本节考虑 n 阶定常离散控制系统

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k), \quad k \geqslant 0 \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

的设计问题。

状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{v}(k) \tag{6.5.2}$$

与系统(6.5.1)构成闭环系统

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(k), \quad k \geqslant 0 \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

由于离散线性系统渐近稳定的充分必要条件为其极点均位于单位圆内部,即特征值的模均小于 1,因此,若以极点配置为设计内容,则所有期望极点必须位于单位圆内部。而对于反馈镇定问题,能够实现镇定的条件为,系统的不能控极点位于单位圆内部。

系统(6.5.1)的二次型最优控制问题如下:求解控制输入 $\boldsymbol{u}(k)$,$k \geqslant 0$,使得如下的二次型性能指标函数

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k)] \tag{6.5.4}$$

达到最小值。其中,N 为指定的终止时刻,$\boldsymbol{S} \geqslant 0$,$\boldsymbol{Q}(k) \geqslant 0$,$\boldsymbol{R}(k) > 0$ 为已知的加权矩阵。

对于时变的离散线性控制系统,也可以提出上述性能指标。当终止时刻 N 为有限正整数时,不论被控系统为时变还是定常,使得指标达到最小的控制律都是状态反馈,且反馈增益矩阵都是时变的,即依赖于时间 $k=0,1,\cdots,N-1$。

当系统为定常、能控、$N \to \infty$、$\boldsymbol{S}=0$、$\boldsymbol{Q}(k)$ 和 $\boldsymbol{R}(k)$ 取为常值矩阵时,二次型最优控制问题的解具有简单明了的形式:

定理 6.5.1　对于能控定常离散线性控制系统(6.5.1)，使得性能指标

$$J(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k)] \tag{6.5.5}$$

达到最小的控制 $\boldsymbol{u}(k)$，$k \geqslant 0$ 存在，且

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(k) \tag{6.5.6}$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \tag{6.5.7}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是如下离散型代数 Riccati 方程

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}]\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q} \tag{6.5.8}$$

的唯一正定解矩阵。性能指标函数的最小值为

$$\boldsymbol{J}_{\min} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0) \tag{6.5.9}$$

在上述定理中，系统能控的条件可以弱化为能够实现镇定，即不能控的极点位于单位圆内部。在系统能镇定或能控的条件下，Riccati 方程(6.5.8)的解矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可由矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$ 来构造。

另一方面，考虑递推矩阵方程

$$\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{P}(k+1) - \boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{R}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(k+1)\}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Q} \tag{6.5.10}$$

取 $\boldsymbol{P}(0)$为任意的半正定对称矩阵，如 $\boldsymbol{P}(0)=0$，依次令 $k=-1,-2,\cdots$进行递推计算。

可以证明，若系统能镇定，则

$$\boldsymbol{P} = \lim_{k \to -\infty} \boldsymbol{P}(k) \tag{6.5.11}$$

实际求解时，可边递推边检验误差矩阵 $\boldsymbol{P}(k)-\boldsymbol{P}(k+1)$，若其足够小从而满足给定要求，就取此时的 $\boldsymbol{P}(k)$作为 $\boldsymbol{P}$ 的近似值。

不论是由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$ 构造 $\boldsymbol{P}$ 还是基于式(6.5.10)迭代得到 $\boldsymbol{P}$，最终都是数值解，是近似值，而迭代的方法更适合计算机进行。

观察式(6.5.7)～式(6.5.9)可知，最优控制的反馈增益矩阵只依赖于矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$，与系统的初态 $\boldsymbol{x}(0)$无关；最优性能指标本质上由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$ 和系统初态 $\boldsymbol{x}(0)$共同确定。

系统(6.5.1)的全维状态观测器为

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}}(k+1) &= \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) - \boldsymbol{L}[\boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}(k) - \boldsymbol{y}(k)] \\ \bar{\boldsymbol{y}}(k) &= \bar{\boldsymbol{x}}(k) \end{aligned} \tag{6.5.12}$$

或者等价的形式

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}}(k+1) &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\bar{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(k) \\ \bar{\boldsymbol{y}}(k) &= \bar{\boldsymbol{x}}(k) \end{aligned} \tag{6.5.13}$$

其中$\bar{\boldsymbol{x}}(k)$是状态向量，原系统的输入 $\boldsymbol{u}(k)$、输出 $\boldsymbol{y}(k)$都是观测器系统的输入向量，$\bar{\boldsymbol{y}}(k)$为可测输出向量，输出方程通常并不明确列出。矩阵 $\boldsymbol{L}$ 称为观测器增益矩阵，矩阵$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})$是观测器的系统矩阵，其特征值称为是观测器极点。

观测器系统的状态向量通过对状态方程获得，初始状态通常取为$\bar{\boldsymbol{x}}(0)=0$。

离散线性控制系统也可以设计降维观测器，思路和连续系统的降维观测器类似；离散线性系统也满足分离原理，即基于状态观测器的状态反馈闭环系统其极点由状态反馈极点和观测器极点组成，可以分别独立设计。

本章小结

本章就状态空间模型、状态响应、能控能观测、稳定性、控制律设计等内容对离散控制系统特别是离散线性控制系统进行了讨论。

离散系统不仅仅是连续系统离散化的结果,有些动态过程本身就是离散的,如【例1.2.4】中的人口模型。

在概念上,离散系统的 z 平面单位圆对应连续系统的 s 平面虚轴,z 平面单位圆内部对应左半 s 平面,z 平面原点对应 s 平面实部为负无穷大的极点。

离散系统区别于连续系统的理论特征是,系统矩阵未必可逆导致的状态转移矩阵未必可逆,使得与连续系统相平行的能控性判据失去了必要性,仅为充分条件。

习题6

6.1　求解离散自治系统

$$x_1(k+1)=0.5x_1(k)+x_2(k)-3x_3(k)$$
$$x_2(k+1)=0.5x_2(k)+2x_3(k)$$
$$x_3(k+1)=0.5x_3(k)$$

的状态响应,初态取为 $\boldsymbol{x}(0)=[1\quad 0\quad -2]^{\mathrm{T}}$。

6.2　求解离散控制系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

的状态响应,输入为单位斜坡函数。

6.3　判断离散自治系统

$$x_1(k+1)=0.5x_1(k)+x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=0.5x_1(k)+2x_2(k)-3x_3(k)$$
$$x_3(k+1)=0.5x_3(k)$$

在原点的稳定性。

6.4　用基于式(6.5.10)的迭代方法进行Matlab编程,求解系统

$$x_1(k+1)=0.5x_1(k)+x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=x_1(k)-3x_2(k)+u(k)$$

的控制律 $\boldsymbol{u}(k)$,使得性能指标

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u})=\sum_{k=0}^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{u}(k)]$$

达到最小,分别指定误差矩阵 $\boldsymbol{P}(k)-\boldsymbol{P}(k+1)$ 元素绝对值的最大值(终止误差上限)不超过0.1、0.01和0.001为终止迭代的条件;简述终止误差上限和 $\boldsymbol{P}(0)$ 的不同取值$(0,E_2,10E_2)$对迭代次数的影响。

6.5　考虑离散控制系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

确定秩判据

$$\text{rank}[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}] = 3$$

是否为系统能控的充分必要条件。

6.6　求解离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k),\quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

的状态响应。以此判断，离散系统极点位于单位圆上，系统一定等幅振荡吗？

参 考 文 献

［1］ 谢绪恺. 现代控制理论基础[M]. 沈阳：辽宁人民出版社，1980.
［2］ 王照林. 现代控制理论基础[M]. 北京：国防工业出版社，1981.
［3］ 郑大钟. 线性系统理论[M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2002.
［4］ William L Brogan. Modern Control Theory[M]. NJ：Prentice Hall，2000.
［5］ 刘豹. 现代控制理论[M]. 北京：机械工业出版社，1983.
［6］ 吴麟. 自动控制原理[M]. 北京：清华大学出版社，1990.
［7］ 戴忠达. 自动控制理论基础[M]. 北京：清华大学出版社，1991.
［8］ 段广仁. 线性系统理论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2004.
［9］ Hassan K Khalil. 非线性系统[M]. 3 版. 朱义胜，董辉，李作洲，等，译. 北京：电子工业出版社，2005.